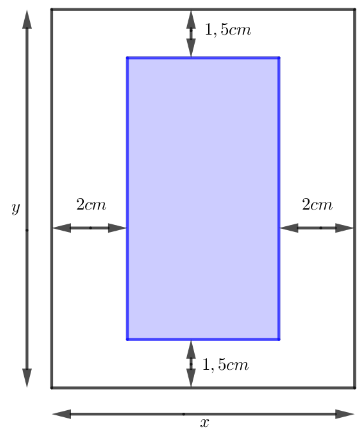
Limites et dérivation

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
3. Préciser s'il existe des asymptotes à la courbe représentative de f.
4. Étudier les variations de cette fonction.
5. Donner le tableau de variation complet de f.

EXERCICE 2 : Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de 300 cm² ;
Les marges doivent faire 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux (voir figure ci-contre).
Problème : Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?



1. Montrer que l'aire d'une page est égale à $f(x) = \dfrac{300x}{x-4} + 3x$.
2. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]4\,;+\infty[$.
3. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
4. Préciser s'il existe des asymptotes à la courbe représentative de f.
5. Étudier les variations de cette fonction sur son ensemble de définition.
6. Donner le tableau de variation complet de f.
7. Résoudre alors le problème posé.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-contre.
1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Préciser si la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes et donner alors leur équation.
3. a) Déterminer si l'équation $f(x) = 3$ admet des solutions.
b) Préciser le nombre de solutions de $f(x) = 3$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5

EXERCICE 4 : Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

a) Si pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \sqrt{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) Si $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Limites, dérivation et continuité

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser s'il existe des asymptotes à la courbe représentative de f.
3. Déterminer la fonction dérivée de cette fonction f.
4. Étudier les variations de cette fonction.
5. Donner le tableau de variation complet de f.
6. a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution α.

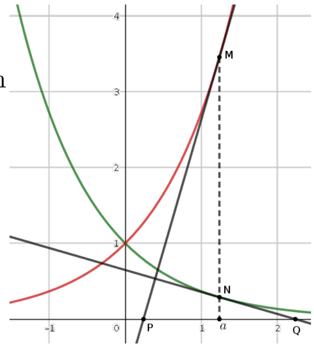
EXERCICE 2 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a. La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q. (figure ci-contre).

Démontrer que la longueur PQ est égale à une constante, et déterminer cette constante.



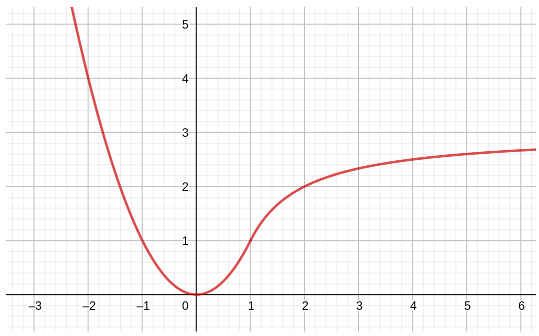
EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+6}{x^2+4}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Préciser si la courbe C_f représentative de la fonction f admet des asymptotes.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. Montrer que cette tangente coupe la courbe C_f en deux points dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \begin{cases} x^2 \; sur \;]-\infty\,;1[\\ 3-\dfrac{2}{x} \; sur \; [1\,;+\infty[\end{cases}$ et sa courbe représentative donnée ci-contre :

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?



EXERCICE 5 : 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

d) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

e) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1 - \dfrac{1}{x}$.

a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

c) En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.

d) Dresser le tableau de variations de f.

3. a) A l'aide du tableau de variations de la fonction f, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ (on ne demande pas de calculer ces solutions).

b) A l'aide de la calculatrice, donner un intervalle d'amplitude 1 contenant chacune des solutions.

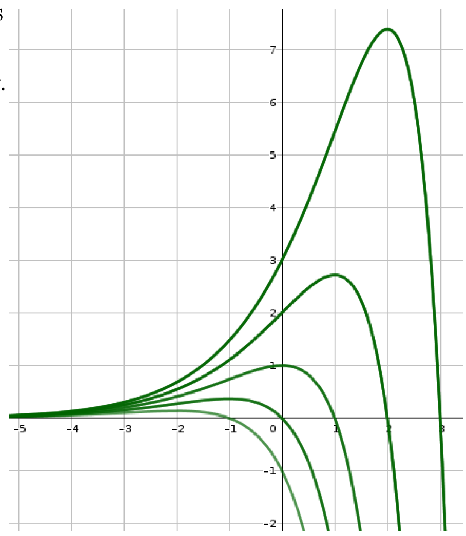
Limites, dérivation et continuité

EXERCICE 1 : 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.
a) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$ et sa courbe représentative C dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)e^{-x}$.
c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. a) Montrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
b) Étudier la position relative de la droite T et de la courbe C.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1$.
1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser s'il existe des asymptotes à la courbe représentative de f.
3. Déterminer la fonction dérivée de cette fonction f.
4. Étudier les variations de cette fonction.
5. Donner le tableau de variation complet de f.
6. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
b) Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de(s) solution(s).

EXERCICE 3 : Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (k - x)e^x$. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-contre quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.
Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un maximum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce maximum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k.
1. Déterminer les coordonnées de A_k en fonction de k.
2. Pour tout réel k strictement positif, les points A_k sont situés sur une courbe à déterminer.



EXERCICE 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.
1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
6. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit d'étudier le signe de $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En déduire la position de T par rapport à C.
7. Montrer que, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}$.
8. Tracer C et T.

EXERCICES TERMINALE SPÉ ÉTUDE DE FONCTIONS (4)

Limites, dérivation, dérivées successives

Exercice 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$ et C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

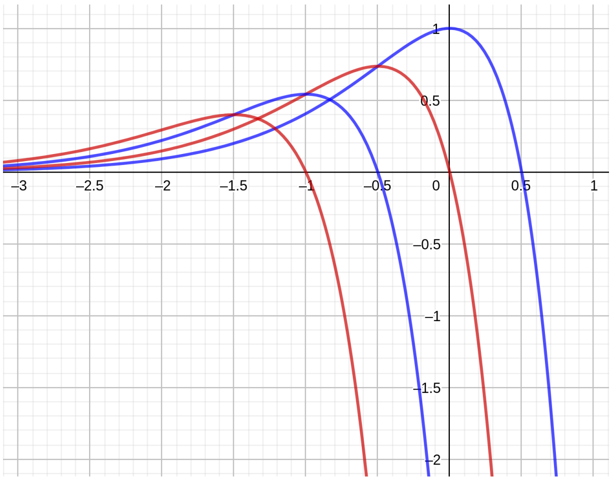
1. Déterminer les dérivées successives $f\,'$, $f\,''$, $f\,''' = f^{(3)}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle C_n la courbe représentative de $f^{(n)}$ dans un repère du plan.

a) Montrer que C_n admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point M_n $(x_n\ ;\ y_n)$.

b) Montrer que la suite (x_n) est une suite arithmétique. Déterminer la limite de (x_n).

c) Montrer que la suite (y_n) est une suite géométrique. Déterminer la limite de (y_n).

4. Retrouver les points M_n pour $n = 0, 1, 2, 3$ sur la figure ci-contre.



Exercice 2 :

1. a) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes C et C' d'équations respectives $y = e^x$ et $y = e^{-x}$.

b) Soit a un réel quelconque ; T et T' sont les tangentes aux points d'abscisses a à, respectivement C et C'. Montrer que T et T' sont perpendiculaires (Propriété P_1).

c) On note H le point de coordonnées (a ; 0) et B et B' les points d'intersection de T et T' avec l'axe des abscisses. Montrer que H est le milieu de [BB'] (Propriété P_2). Représenter T, T', B, B' et H pour $a = 2$.

2. *Généralisation* : On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, et les courbes C et C' d'équation $y = f(x)$ et $y = f(-x)$.

a) Montrer que la fonction f vérifie la propriété P_1 si $f\,'(a)\times f\,'(-a) = 1$ pour tout a tel que $f\,'(a)$ différent de 0.

b) Montrer que la fonction f vérifie la propriété P_2 si $f(a)\times f\,'(-a) = f(-a)\times f\,'(a)$ pour tout a tel que $f\,'(a)$ différent de 0.

c) Montrer que cette dernière propriété est équivalente à $f(a)\times f(-a) = k$ pour tout a tel que $f\,'(a)$ différent de 0 et où k est une constante réelle.

d) Trouver une condition sur les réels c et b pour que les fonctions f de la forme $f(x) = c\times\exp(bx)$ possèdent les propriétés P_1 et P_2.

e) Déterminer les réels d, b et c pour que les fonctions f de la forme $f(x) = d\times\exp(bx + c)$ possèdent les propriétés P_1 et P_2.

Exercice 3 : (Antilles–Guyane 29 septembre 2020)

Partie A : La fonction g est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = 1 - e^{-x}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Partie B : Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^{-kx} + 1$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f\,'$ sa fonction dérivée. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I, J), on note C_f la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k. La tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.

1. a. Démontrer que pour tout réel x, $f\,'(x) = e^{-kx}(-kx + k + 1)$.

b. Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la partie A.

2. En utilisant la partie A, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].