EXERCICE 1 :

1. Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

a) (E) : $y' = 3y + 1$; b) (E) : $y' + 2y = 0$; c) (E) : $2y' - y = 4$;

d) (E) : $\dfrac{y'+5y}{2} = 1$; e) (E) : $y' = \dfrac{y-1}{2}$;

2. Pour chacun des ensembles solutions trouvées, préciser la solution f vérifiant la condition : $f(0) = 1$.

3. Montrer que pour chacune des solutions f trouvées à la question 2, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.

EXERCICE 2 :

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ en vérifiant que la fonction g est bien une solution de (E) :

a) (E) : $y' = 2y - 5x - 4$; solution particulière $g(x) = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{13}{4}$.

b) (E) : $y' = 2y - x^2 + 1$; solution particulière $g(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{4}$.

c) (E) : $y' = 4y + \mathrm{e}^{x-1}$; solution particulière $g(x) = \dfrac{-1}{3}\mathrm{e}^{x-1}$.

d) (E) : $y' = y + x\mathrm{e}^x$; solution particulière $g(x) = (\dfrac{1}{2}x^2 + 2)\mathrm{e}^x$.

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $2y' - 5y = 4$ telle que $f''(1) = \dfrac{25}{2}$.

1. Démontrer que si g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $g'' = \dfrac{25}{4}g + 5$.

2. En déduire les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

4. Déterminer une expression de la fonction f.

EXERCICE 4 : Charge du condensateur d'un dipôle (R, C) : Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E, un condensateur de capacité C et une résistance R. A tout instant $t > 0$, on note $i(t)$ l'intensité en ampères dans le circuit, $q(t)$ la charge du condensateur et $u(t)$ la tension à ses bornes.

On a $q(t) = \mathrm{C}u(t)$, $i(t) = q'(t)$ et $u(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}$.

On suppose que le condensateur est sans charge initiale (c'est-à-dire que $q(0) = 0$).

1. Déterminer l'expression de $q(t)$. Déterminer $\mathrm{Q} = \lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ (charge maximale du condensateur).

2. A quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa charge maximale Q, le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à $\lambda = \mathrm{RC}$?

3. Déterminer l'expression de $i(t)$.

EXERCICE 5 : Bobine d'induction (L, R) : Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E et une bobine de résistance R. A tout instant $t \geq 0$, on note $i(t)$ l'intensité en ampères dans le circuit

On a $\mathrm{L}i'(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}$. On suppose que $i(0) = 0$.

1. Déterminer l'expression de $i(t)$.

2. Déterminer $l = \lim\limits_{t \to +\infty} i(t)$.

3. A quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa valeur limite l, l'intensité atteint-elle au bout d'une durée égale à $\lambda = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$?

EXERCICE 6 : Propriété d'une courbe : Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que la courbe représentative C possède la propriété suivante : si P est le point d'intersection de la tangente à C en M avec l'axe des abscisses, et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors la distance PH est égale à une constante strictement positive.

EXERCICE 7 : Équation logistique : Un biologiste observe la croissante d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries.
Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures). Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle : $N'(t) = 0{,}07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$ appelée équation logistique.
On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul.
On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.
En déduire l'expression de P, puis celle de N.
Quelle est le nombre de bactéries au bout de 50 heures ? Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale du milieu ?

EXERCICE 8 : Modèle d'évolution : Dans un pays, on suppose que le taux de natalité est de 20 ‰ , le taux de mortalité est de 15 ‰ et 100 000 personnes arrivent dans le pays chaque année. On note $\mathrm{P}(t)$ le nombre d'habitants l'année t (en millions d'habitants).
Montrer que $\mathrm{P}(t+1) - \mathrm{P}(t) = \dfrac{\mathrm{P}(t)}{200} + 0{,}1$.
On suppose alors que P est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{200}y + 0{,}1$. Résoudre cette équation.
Sachant que $\mathrm{P}(1950) = 30{,}5$ estimer alors $\mathrm{P}(2050)$.

EXERCICE 9 : Loi de refroidissement de Newton : A l'instant $t = 0$ (exprimé en heure), un corps dont la température est de 100 °C est placé dans une salle à 20 °C. On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t . D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle.
Trouver une équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$.
Au bout de 30 secondes, le corps est à 80 °C.
Déterminer $\theta(t)$. Déterminer la température du corps au bout de 10 minutes. Déterminer le temps nécessaire pour que la température tombe à 30 °C.

EXERCICE 10 : Dissolution d'une substance : Lorsqu'on place une substance solide (comme le sel) dans l'eau, la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, à tout instant.
On place 10 kg de sel dans un grand récipient d'eau à l'instant $t = 0$ et on note $f(t)$ la quantité dissoute (en kg) à l'instant t (en minute).
1. Trouver une équation différentielle satisfaite par $f(t)$.
2. Sachant que le premier kilo est dissous en 5 min, déterminer $f(t)$ en fonction de t .
3. Au bout de combien de temps la moitié du sel est-il dissous ?

EXERCICE 11 : Taux d'alcoolémie : Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (en heure) de son organisme.
On considère que f satisfait l'équation différentielle $f'(t) = ae^{-t} - f(t)$ et $f(0) = 0$ (a est une constante positive dépendant de la personne et de la quantité absorbée).
On pose $g(t) = e^t \times f(t)$. Déterminer $g(t)$ puis $f(t)$ en fonction de t.
On suppose que $a = 5$. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.
Au bout de combien de temps la personne peut-elle prendre le volant sans enfreindre la législation (le taux maximal autorisé est de 0,5 g/L) ?

EXERCICE 12 : Désintégration des noyaux radioactifs : Soit $\mathrm{N}(t)$ le nombre de noyaux d'un corps radioactifs à l'instant t (t en années); la variation du nombre $\mathrm{N}(t)$ en fonction du temps est proportionnelle à $\mathrm{N}(t)$, soit $\mathrm{N}'(t) = -\lambda\,\mathrm{N}(t)$ (où $\lambda > 0$). Déterminer $\mathrm{N}(t)$ en fonction de t .
Le temps caractéristique est défini par $t = \dfrac{1}{\lambda}$. Déterminer la demi-vie du corps (temps au bout duquel $\mathrm{N}(t)$ a diminué de moitié) en fonction de λ .