Exercice 1 : Calculs algébriques

Simplifier les expressions suivantes :

a) $e^2(e^4+e^5)$; b) $e^{-3}(e^2\times e^4)^3$ c) $\dfrac{e^2\times e^5}{e^{-1}\times e^3}$; d) $\sqrt{e^4\times e^6}\times(e^{-1})^2$; e) $e^{2x+3}\times e^{4x-5}$;

f) $\dfrac{e}{e+1}+\dfrac{e}{1+e^{-1}}$; g) $\dfrac{e^{2x}\times e^{x-5}}{e^{-x}}$; h) $\dfrac{e^{x^2}\times e^{x+1}}{e^{x^2-1}}$; i) $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$.

Exercice 2 : Résolution d'équations et d'inéquations :

a) Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = 1$; b) $e^{2x+1} = 1$; c) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$; e) $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$;

b) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^x \leq 1$; b) $e^{2x+1} \geq 1$; c) $e^{-x+1} \leq 1$; d) $e^{3x-4} \geq e^{-2x}$; e) $e^x - e^{-x} \leq 0$.

Exercice 3 : Étude de fonctions :

Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, limites aux bornes, variations) :

a) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; b) $f(x) = e^x - e^{-x}$; c) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$; d) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

e) $f(x) = e^{2x} - e^x - 6$; f) $f(x) = e^x - x$; g) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Exercice 4 : Représentations graphiques :

1. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = e^x - x$ admet-elle une tangente passant par l'origine du repère ?
2. On considère les réels a et b, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{-x} + be^{-2x}$. Déterminer a et b pour que la courbe C représentative de f passe par le point A(0 ; 1) et admettent une tangente horizontale en ce point.
3. On considère les réels a et b, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + be^{-x}$. Déterminer a et b pour que la courbe C représentative de f passe par le point A(0 ; 3) et admettent une tangente en ce point de coefficient directeur égal à 1.

Exercice 5 : On considère un réel k et la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$. La courbe C_k est la courbe représentative de f_k dans un repère du plan.

1. Déterminer la fonction de dérivée et les variations de la fonction f_k.
2. Pour tout réel k, montrer que la fonction f_k admet un unique maximum, noté y_k .
3. Soit M_k le point de C_k de coordonnées $(x_k ; y_k)$.

Montrer que le point M_k appartient à la courbe C d'équation $y = e^{-x}$.

4. Déterminer une équation de la tangente T_k à la courbe C_k en $x = 0$.
5. Montrer que, pour tout réel k, la droite T_k passe par un point fixe dont on donnera les coordonnées.

Exercice 6 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2\,e^{\frac{x}{2}} - 1$, C_f et C_g les représentations graphiques de f et g dans un repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun et qu'en ce point elles ont la même tangente T dont on déterminera une équation.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\,e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout réel x, $g(x) \geq x + 1$.

b) Que peut-on en déduire sur la position de C_g et T ?

3. a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.

b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g .

Exercice 7 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}}$ et C sa représentation graphique dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1. Étudier les variations de la fonction f .

3. On admet que pour tout réel x, $f(x) > 1$. Écrire un algorithme qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $f(n) > 0{,}999$.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et C sa représentation graphique dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1. Montrer que le point K(0 ; 0,5) est un centre de symétrie de C.

Pour cela, il faut démontrer que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2\times 0{,}5 = 1$.

2. Étudier les variations de f .

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point K.

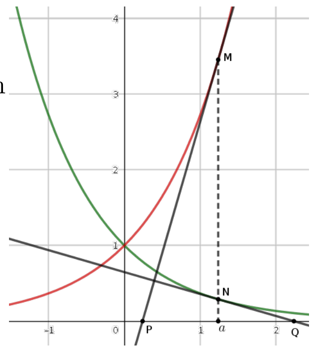
4. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C , il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

5. a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Déterminer, en les justifiant les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$.

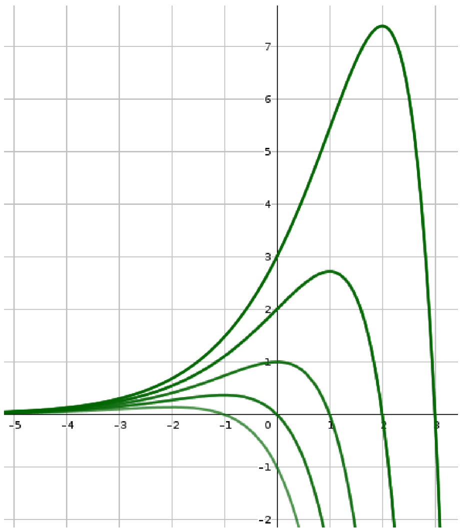
c) En déduire la position de T et de C.

6. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3}$. Écrire le plus simplement possible la solution.



Exercice 9 : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan. Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a. La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q. (figure ci-contre).

Démontrer que la longueur PQ est égale à une constante, et déterminer cette constante.



Exercice 10 : Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (k - x)e^{x}$.
On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-contre quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.

Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k semble admettre un maximum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce maximum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k.

1. Déterminer les coordonnées de A_k en fonction de k.

2. Pour tout réel k strictement positif, les points A_k sont situés sur une courbe à déterminer.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{1-x} - 1$.

2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Les courbes C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g.

3. Montrer que les courbes C_f et C_g se coupent en un seul point A dont on donnera les coordonnées.

4. Les tangentes aux courbes C_f et C_g en A sont-elles les mêmes ? Justifier la réponse.