EXERCICE 1 (Calculs de limites) :

1. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ (si cela est possible !) :

a) $x \to x^2 - 3x - 4$; b) $x \to x^3 + x^2 + 1$; c) $x \to \dfrac{3x^2-1}{x}$; d) $x \to x+\dfrac{1}{x^2}$; e) $x \to \dfrac{2x-3}{\sqrt{x}}$;

f) $x \to \dfrac{2x-1}{x}$; g) $x \to \dfrac{2x-1}{x^2+1}$; h) $x \to \dfrac{2+\cos(x)}{x^2+1}$; i) $x \to \dfrac{2x\sqrt{x}+x+2}{x}$;

j) $x \to x - \sqrt{x}$; k) $x \to \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ l) $x \to \sin x$; m) $x \to \sqrt{x^2+x+1}+x+2$.

2. a) Calculer la limite de $x \to \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$ en $+\infty$; b) Calculer la limite de $x \to \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ en 3 ;

c) Calculer la limite de $x \to \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$ en $+\infty$;

EXERCICE 2 (Asymptotes) : a) Après avoir déterminer leur ensemble de définition, déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$; $g(x) = \dfrac{5x^2-2x+1}{2x+3}$; $h(x) = \dfrac{x^2+4x-1}{x^2+2}$; $k(x) = \dfrac{3x}{4-2x}$.

$m(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3}$; $n(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$; $m(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3}$;

EXERCICE 3 (Calculs de limites) : En utilisant les théorèmes de comparaison sur les limites de fonctions, calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

$f(x) = \cos(x) - 3x$; $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$; $h(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $j(x) = \dfrac{x}{2\sin(x)+3x}$.

Étudier la limite en 0 des fonctions g, h, j et de la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

EXERCICE 4 (Continuité) : Étudier la continuité des fonctions suivantes en la valeur a indiquée :

a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, en $a = 0$; *b)* $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$, en $a = 0$;

$h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$, en $a = 0$.

EXERCICE 5 (Résolution d'équations) :

a) On considère la fonction f définie sur $[0\ ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ a une unique solution ?

b) Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

c) Résoudre l'équation $\cos x = x$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

d) Résoudre l'équation $|x^3 - 12x| = 1$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

EXERCICE 6 : Dans un repère orthonormal, on considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnées (1; 0). M et N sont deux points du cercle (C) tels que (MN) et (OI) soient perpendiculaires et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN). On pose OH $= x$.

1. Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de x.
2. On considère la fonction f définie sur $[-1 ; +1]$ par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1-x^2}$.

a) Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Étudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en $+1$.
En déduire une équation des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -1 et $+1$.
c) Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.
d) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique: 10 cm).

3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle maximale? Quelle est cette aire?
4. Déterminer à 0,01 près, pour quelle valeur de x, autre que zéro, l'aire du triangle MNI est égale à 1.

EXERCICE 7 : Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout x de $]1; +\infty[$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

Dans la suite du problème, vous pourrez utiliser, suivant les questions, la forme initiale de *f(x)* ou la forme établie dans cette première question.

2. a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.
c) Établir le tableau de variations de f.

3. a) Donner une équation de l'asymptote verticale à (C).

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C).

EXERCICE 8 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$.

1. Vérifier que f est définie sur $]-\infty; -2] \cup [0 ; +\infty[$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) représentative de f.
3. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
c) La fonction f est-elle dérivable en 0 et en -2 ?

EXERCICE 9 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la courbe (C) représentative de f admet une asymptote dont vous préciserez l'équation.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
5. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote.
6. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe (C), la tangente et l'asymptote.

EXERCICE 10 : On considère la fonction f : $f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2-4x+3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$.

1. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction:

a) n'admet ni maximum, ni minimum ?
b) admet un maximum M et un minimum m (démontrer alors que $M \times m > 0$)
c) admet seulement un minimum ?

2. Représenter, sur une même figure, les courbes correspondant à a égal à 2, 0 et 4.

EXERCICE 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^2+1}$.

1) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = x + 1 + 2\ \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2) Calculer la dérivée $f\,'$ de la fonction f. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $f\,'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

avec a et b que l'on déterminera. En déduire son signe.
3) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.
6) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
Donner une interprétation géométrique.
7) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse – 1.
Préciser la position de (T) par rapport à (C).

EXERCICE 12 : Une ficelle de longueur l est coupée en deux morceaux; avec l'un d'eux, on forme un cercle, et avec l'autre un carré. A quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximale ?

EXERCICE 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-4x+5}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$.

2. a) Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire sous la forme $f\,'(x) = \dfrac{2(x-2)(x^2+dx+e)}{(x-1)^3}$,

pour des réels d et e que l'on déterminera et étudier son signe.
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Déterminer l' abscisse du point de (C) où la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{9}{4}$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que $\alpha \in]-2; -1[$.
5. Tracer la courbe (C), les asymptotes et la tangente (T).
6. Déterminer une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$.

EXERCICE 14 : On fabrique un cornet en papier de forme conique en rejoignant les bords droits d'un disque de rayon a amputé d'un secteur circulaire. Quelle est le volume du plus grand cornet possible ?

EXERCICE 15 : D'une longue feuille de zinc de 30 cm de large, on veut faire une gouttière en pliant les bords à 60°. A quel endroit faut-il plier pour que la capacité de la gouttière soit maximale ?

EXERCICE 16 : Dans le plan P, ABCD est un rectangle ; une droite variable (d) passant par C est sécante à la droite (AB) en M et à la droite (AD) en N. On désigne par I le milieu du segment [MN]. En se plaçant dans le repère orthogonal $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$, déterminer le lieu géométrique du point I.

EXERCICE 17 : On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f\,'(u_n)}$.

Vérifier que la suite (u_n) converge et donner une approximation à 10^{-7} près de sa limite.
Vérifier que cette limite est solution de l'équation $f(x) = 0$.