EXERCICE 1 : 1. Simplifier les expressions suivantes sous la forme $\ln(a)$ ou $b\ln(a)$:

a) $\ln(2) + \ln(5) - \ln(4)$; b) $\ln(6) + \ln(8) - \ln(12)$; c) $\ln(27) - 2\ln(3)$;

d) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; e) $\ln\left(2+\sqrt{2}\right)^{10} + \ln\left(2-\sqrt{2}\right)^{10}$; f) $4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2$;

g) $\ln(\mathrm{e}^{-1}) + \ln(\mathrm{e})$; h) $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$; i) $\ln(\sqrt{e}) + \ln(e^2) - \ln(e^3)$;

j) $e^{1+\ln 2} \times e^{1-\ln 2} \times \dfrac{1}{e}$; k) $\ln\sqrt{e^4} - \ln\sqrt{e^2} + \ln\sqrt{e^{-\ln 2}}$.

2. Résoudre les équations (préciser le domaine de validité des équations) :

a) $\ln(x+3) = 1$; b) $\ln(x^2+3) = 2\ln(2)$; c) $\ln(x-1) = \ln(2x+3)$;

d) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+1)$; e) $\ln(x^2+1) = \ln(2x+1)$; f) $\ln(x-1) + \ln(-x+3) = 0$;

g) $\ln(x-2) - \ln(-x+5) = \ln 2$; h) $\ln(e^x - 2) + \ln(e^x + 3) = 0$.

3. Résoudre les inéquations (préciser le domaine de validité des inéquations):

a) $\ln(x+3) < 1$; b) $\ln(x+3) + \ln(x+2) > \ln(x+1)$; c) $\ln(x^2+1) < \ln(2x+1)$;

d) $\ln(x-1) + \ln(-x+3) < 0$; e) $\ln(x-2) - \ln(-x+5) \leqslant \ln 2$; f) $\ln(x-1) \geqslant \ln(-x+4)$;

EXERCICE 2 : Étudier les fonctions suivantes : (domaine de définition et de dérivabilité, limites aux bornes, asymptotes éventuelles, variations sur le domaine de définition) :

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$; $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$; $h(x) = 1 - \ln\sqrt{1-x}$; $j(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$;

$k(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $p(x) = \ln(x+1) - 2x + x^2$; $q(x) = \dfrac{3}{2}x + \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$; $r(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{2}x + 3 + \dfrac{2\ln(x)-1}{x}$.

A. *Étude d'une fonction auxiliaire.*

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ et calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$. Vérifier l'encadrement $1{,}86 < \alpha < 1{,}87$ et préciser le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

B. *Étude de la fonction f.*

1. a) Déterminer la dérivée f' de f. Montrer qu'en tout point x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Déterminer le sens de variation de f.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Montrer que $f(\alpha) = -\alpha + 3 + \dfrac{2}{\alpha}$.

EXERCICE 4 : Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

b) Montrer que pour x réel strictement positif, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 1$.
5. Tracer la courbe (C) et la tangente (T).

EXERCICE 5 : Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2\,(2 - \ln(x))$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
b) Montrer que pour x réel strictement positif, $f'(x) = \dfrac{(\ln x)\times(4-3\ln x)}{x}$.
c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = e$.
4. Tracer la courbe (C) et la tangente (T).

EXERCICE 6 : On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - x\ln x$.
1. Étudier les variations de f et déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
a) Déterminer le sens de variations de la suite (v_n).
b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).
c) Montrer que (u_n) est bornée.
d) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

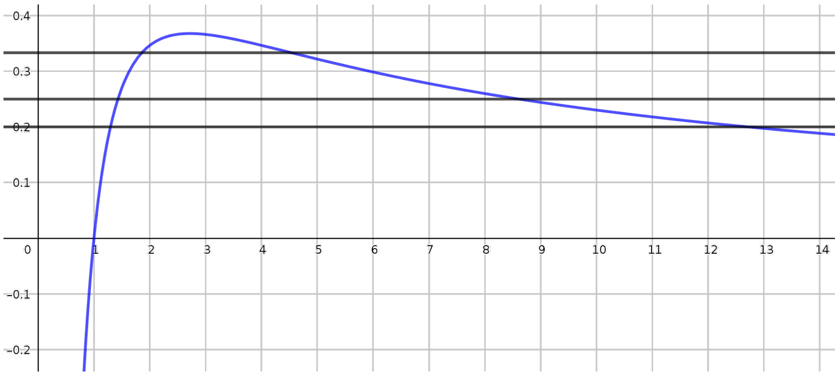
EXERCICE 7 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$.
1. Écrire un algorithme permettant de déterminer le terme u_n pour un entier naturel n quelconque.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\ln(1 + x) \leq x$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\ln(1 + n) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \ln(n + 1)$.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 8 : On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{x^2-1}{2x}$.
1. *Étude d'une fonction auxiliaire* : On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln(x)$.
a) Étudier le sens de variations de g.
b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
2. *Étude de la fonction f* : a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
En déduire le sens de variation de f.
b) Calculer la limite de f en 0; quelle est la conséquence graphique ?
c) Calculer la limite de f en $+\infty$.
d) Dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 9 : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\ln(x)$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Démontrer qu'il existe une unique tangente à la courbe (C) passant par O.

EXERCICE 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Démontrer que (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$.

EXERCICE 11 : Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation (E_n): $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$ ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.



Partie A : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

La courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal est donné ci-dessus.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B : 1. Montrer que, pour $n > 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; \mathrm{e}]$ notée α_n .

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n > 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b. Comparer, pour tout entier $n > 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c. En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3. On admet que, pour tout entier $n > 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq \mathrm{e} \leq \beta_n$.

a. On admet que la suite (β_n) est croissante.

Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geq n$.

b. En déduire la limite de la suite (β_n).

EXERCICE 12 : On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et en déduire son signe.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$.

Dans l'algorithme ci-contre, i et n sont des entiers naturels et u est un réel.

a) Compléter l'algorithme pour qu'il affiche la valeur de u_n pour un entier n strictement positif.

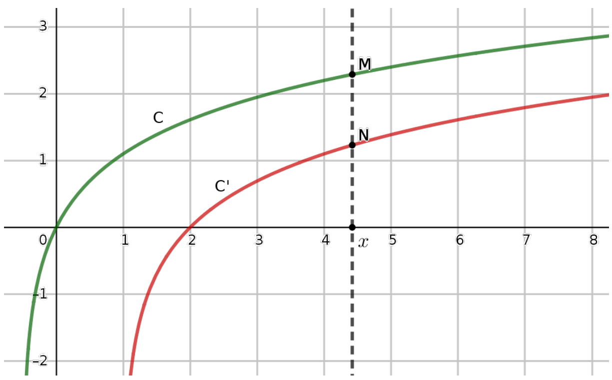
b) Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée de u lorsque $n = 4$.

c) Démontrer que pour tout entier n strictement positif, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

```
u ← 0
Pour i allant de 1 à ...
    u ← ...
Fin Pour
u ← ...
```

EXERCICE 13 : Les courbes C et C' ci-contre sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(x - 1)$.



1. Les courbes C et C' se coupent-elles ?
2. Soit $x \in]1 ; +\infty [$, M et N sont les points d'abscisse x respectivement sur C et C'.

Quelle est la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$?

3. On donne l'algorithme ci-contre :

```
n ← 1
Tant que  f(n) – g(n) – ln(2) ≥ 0,1 :
    n ← ...
Fin Tant que
```

a) Donner la valeur de n affichée en sortie de l'algorithme.

b) Que représente cette valeur de n ?