EXERCICE 1 : On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. On note M_n la proportion de piles obtenus.
Quelle doit-être la valeur minimale de n pour que la probabilité de l'événement $|M_n - \frac{1}{2}| \geqslant 0{,}01$ soit inférieure à 0,01 ?

EXERCICE 2 : On répète 20 fois de suite une épreuve de Bernoulli de manière indépendante de paramètre $p = \frac{1}{4}$.
Pour tout entier i compris entre 1 et 20, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient le succès et à 0 sinon à la i-ième épreuve.
On pose $S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{20}$.
1. Déterminer l'espérance et la variance de X_i pour i compris entre 1 et 20.
2. Déterminer l'espérance et la variance de S.
3. Justifier que S suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. Donner une minoration de $p(0 \leq S \leq 10)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 : Une association organise un jeu d'argent pour récolter des fonds.
Chaque participant doit verser 9 € de participation avant de lancer trois dés équilibrés.
Si le résultat est 421, il gagne 99 €.
1. Montrer que la probabilité de faire 421 est $\frac{1}{36}$.
2. On note G_i le gain du i -ème participant.
a) Donner la loi de G_i.
b) Calculer son espérance et sa variance.
3. On pose $M_n = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{n}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p(|M_n - E(M_n)| \geq t)$.
4. On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'association après la participation de n personnes.
a) Exprimer X_n en fonction des G_i.
b) Calculer l'espérance et la variance de X_n.
5. On suppose que 100 personnes vont participer. Donner une minoration de la probabilité que le gain algébrique de l'association soit strictement compris entre 600 € et 650 €.

EXERCICE 4 : On considère une urne contenant cinq boules noires et trois boules blanches. On souhaite estimer la probabilité d'obtenir au moins six boules noires sur un ensemble de dix tirages avec remise.
Pour simuler cette expérience plusieurs fois, Adrien a écrit un programme avec Python.
En effectuant 100000 épreuves de dix tirages, il obtient une proportion $p \approx 0{,}6943$.
Sachant que la variance est 2,344, déterminer la probabilité de se tromper de plus d'un centième.

EXERCICE 5 : On lance 10000 fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Pour chaque lancer i, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si on obtient 4 et 0 sinon.
On note $X = \frac{\sum_{i=1}^{i=10000} X_i}{10000}$ la variable aléatoire moyenne donnant la proportion de 4 obtenus.
Majorer la probabilité que X s'écarte de plus de 0,05 par rapport à la moyenne.

EXERCICE 6 : On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge-t-elle ?