EXERCICE 1 :

1. Dans chacune des cas suivants, montrer que la fonction F est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$:

a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$; (E) : $y' = 3x^2 - 4x + 1$;

b) $F(x) = (x - 1)e^x$; (E) : $y' = xe^x$;

c) $F(x) = \ln(e^x + 1) + 2$; (E) : $y' = \dfrac{e^x}{e^x+1}$;

d) $F(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$; (E) : $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

e) $F(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$; (E) : $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$;

2. En déduire toutes les primitives de chacune des fonctions données dans l'équation (E).

3. Dans chacune des cas suivants, montrer que la fonction F est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I indiquée :

a) $F(x) = x\ln(x) - x$ sur $I =]0 ; +\infty[$; (E) : $y' = \ln(x)$;

b) $F(x) = \ln(x - 3) - 2$ sur $I =]3 ; +\infty[$; (E) : $y' = \dfrac{1}{x-3}$;

c) $F(x) = 2\ln(x^2 - 1)$ sur $I =]1 ; +\infty[$; (E) : $y' = \dfrac{4x}{x^2-1}$;

d) $F(x) = \ln(-x)$ sur $I =]-\infty ; 0[$; (E) : $y' = \dfrac{1}{x}$;

EXERCICE 2 :

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - x$; b) $f(x) = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{1}{4}$; c) $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$; d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{6x}{5} - \dfrac{3}{2}$;

e) $f(x) = (2x^2 - 3)^2$; f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; g) $f(x) = e^{2x-1}$;

EXERCICE 3 :

Déterminer la primitive F des fonctions f suivantes sur l'intervalle indiquée et telle que $F(c) = d$:

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $c = 2$ et $d = 1$.

b) f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2x + 1$; $c = 1$ et $d = -1$.

c) f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $c = 2$ et $d = 1$.

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{-2x}$; $c = \ln(2)$ et $d = 1$.

e) f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + 1$; c = 1 et d = – 2.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x+1}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) = x + 4 + \dfrac{2}{x+1}$.

2. En déduire une primitive de f sur $]-1 ; +\infty[$.

EXERCICE 5 :

On lâche une pomme d'une hauteur de 10 mètres. Lors de sa chute :
- la vitesse $v(t)$ (exprimée en m.s^{-1}) de la pomme en fonction du temps t (exprimé en seconde) est solution de l'équation différentielle $y' = 9{,}8$;
- la distance $d(t)$ exprimée en m) parcourue par la pomme es solution de l'équation différentielle $y' = v$.

Quelle est la vitesse de la pomme lorsqu'elle s'écrase au sol ?

EXERCICE 6 :

Une fusée décolle verticalement du sol à l'instant $t = 0$. Lors des deux premières minutes de vol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}) à l'instant t (exprimé en seconde) est donnée par la formule $v(t) = 0{,}06t^2 + 0{,}8t$ et on note $d(t)$ la distance (en m) qu'elle a parcourue.

1. Déterminer $d(t)$ sachant que d est une primitive de v.
2. A quelle distance de la Terre se trouve la fusée après deux minutes de vol ?

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.
2. En déduire l'ensemble des primitive de f sur $]-1\ ;\ 1[$.
3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

EXERCICE 8 :

On considère les fonctions F et G définies sur $]2\ ;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$ et $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$.

1. Les fonctions F et G sont-elles les primitives d'une même fonction f ? Si oui, déterminer $f(x)$?
2. Déterminer la fonction H définie sur $]2\ ;+\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x)$.
3. La fonction H est-elle une primitive de f ?
4. Déterminer les réels a, b et c tels que $\mathrm{F}(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$. En déduire une primitive de F sur $]2\ ;+\infty[$.
5. Déterminer les réels m, n et p tels que $\mathrm{G}(x) = mx + n + \dfrac{p}{x-2}$. En déduire une primitive de G sur $]2\ ;+\infty[$.

EXERCICE 9 :

1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I en utilisant l'une des formules : $\dfrac{u'}{u}$, $\dfrac{u'}{u^2}$, $u'u^n$, $u'e^u$:

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $\mathrm{I} =]0\ ;+\infty[$.

b) $f(x) = (x-1)(x^2-2x+4)^5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$; $\mathrm{I} =]1\ ;+\infty[$.

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = (x-2)\ e^{x^2-4x+1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.