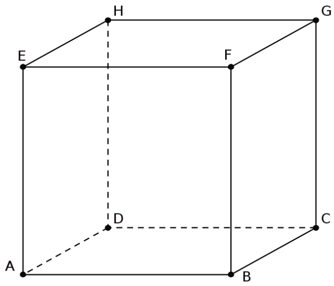
EXERCICES TERMINALE spécialité PRODUIT SCALAIRE



Exercice 1 : Soit un cube ABCDEFGH d'arête 4 cm comme sur la figure ci-contre.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}$.
3. Calculer les longueurs AC, AG.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{GAC}$.

Exercice 2 : Soit un cube ABCDEFGH d'arête a comme sur la figure ci-contre.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [BF], [FG] et [GH].
1. Faire une figure.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les longueurs EI, EK et le produit scalaire $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EK}$.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IEK}$.

Exercice 3 : ABCDEFGH est un cube d'arête a. M et N sont les centres des faces BCGF et EFGH.
1. Calculer en fonction de a, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$, les longueurs AM et AN.
2. En déduire une mesure en degrés à 0,1° près de l'angle $\widehat{MAN}$.

Exercice 4 : ABCD est un tétraèdre tel que : AB = AC = AD = 4 et BC = CD = DB = 3.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
1. Faire une figure.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$.
4. En déduire la longueur AI.
5. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
6. En déduire l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{IAJ}$.

Exercice 5 : Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace, on considère les points A(1 ; – 2 ; 3), B(– 3 ; 2 ; 1), C(2 ; 1 ; 6) et D(6 ; 1 ; – 2).
1. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
2. En déduire une mesure des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BDC}$.
3. Quelle est la position des droites (AB) et (CD) ?

Exercice 6 : Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace, on considère les points A(1 ; 4 ; – 1), B(– 1 ; 0 ; 1), C(3 ; – 4 ; – 3) et E(– 1 ; 0 ; – 5).
1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour ABCD ?
4. Soit I le centre de ABCD. Déterminer les coordonnées de I.
5. Montrer que la droite (EI) est perpendiculaire au plan (ABC).
6. En déduire le volume de la pyramide ABCDE.

Exercice 7 : Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace, on considère les points
A(5 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 10), H($\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{1}{3}$) et K($\frac{20}{29}$; $\frac{50}{29}$; 0).
1. Montrer que les droites (AB) et (OC) sont orthogonales, ainsi que les droites (AC) et (OB) ainsi que les droites (BC) et (OA). Le tétraèdre OABC est dit alors orthocentrique.
2. Montrer que le point K est sur la droite (AB).
3. Montrer que [CK] est une hauteur du triangle ABC.
4. Montrer que le point H est sur la droite (CK).
5. Montrer que [OH] est la hauteur du tétraèdre OABC.
6. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

Complément : à l'aide d'un logiciel, trouver le lieu des points H et K lorsque C varie sur l'axe (O z).

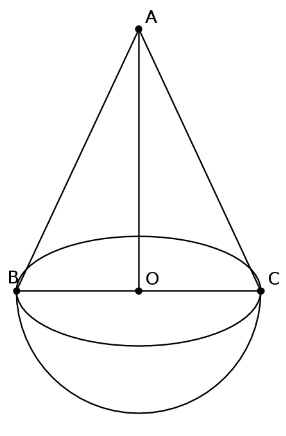
Exercice 8 : ABCD est un tétraèdre quelconque.
Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Exercice 9 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points
A(2 ; 2 ; – 4), B(4 ; 5 ; 2), C(– 5 ; 1 ; – 1), D(1 ; 3 ; – 4) et les points I, J, K et L milieux respectifs des segments [AD], [BC], [AC] et [BD].
1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et que AB = CD.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{KL}$.
3. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes et perpendiculaires.
4. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?
5. Déterminer les longueurs des côtés de IKJL.
6. Déterminer une mesure à 1° près des angles du triangle ABC.
7. Déterminer une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{KJL}$.

Exercice 10 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points
A$(a ; 0 ; 0)$, B$(0 ; a ; 0)$, C$(-a ; 0 ; 0)$, D$(0 ; -a ; 0)$ et E$(0 ; 0 ; a)$.
1. Faire une figure à compléter au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
4. Quelle est la nature du triangle ABE ?
5. Quelle est la nature de la pyramide ABCDE ?
6. Quelle est la nature du triangle ACE ?
7. Soit F le symétrique de E par rapport à O. Quelle est la nature du polyèdre ABCDEF ?
8. Soit I le centre de gravité du triangle ABE. On peut définir I par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$.
Déterminer les coordonnées du point I en fonction de a.
9. On définit les points J, K, L, M, N, P Q comme centre de gravité des faces BCE, CDE, ADE, ABF, BCF, CDF et ADF. Quelle est la nature du polyèdre IJKLMNPQ ?

Exercice 11 : On considère un tétraèdre ABCD régulier, c'est-à-dire que toutes les arêtes ont la même longueur a.
1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{-a^2}{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
2. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [CD].
Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit H le centre de la face BCD et K le milieu de [AH].
4. Montrer que le repère (K ; B, C, D) est un repère orthonormé pour une certaine valeur de a.

Exercice 13 : Un jouet a la forme d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A, comme l'indique la figure ci-contre. Le segment [BC] est un diamètre de la base du cône; le point O est le centre de cette base.
On donne AB = 7 cm et BC = 6 cm.
1. a) Construire, en vraie grandeur, le triangle rectangle AOB.
b) Calculer la valeur exacte de AO.
c) Calculer la valeur exacte du sinus de l'angle $\widehat{BAO}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAO}$.
2. Calculer le volume de ce jouet.



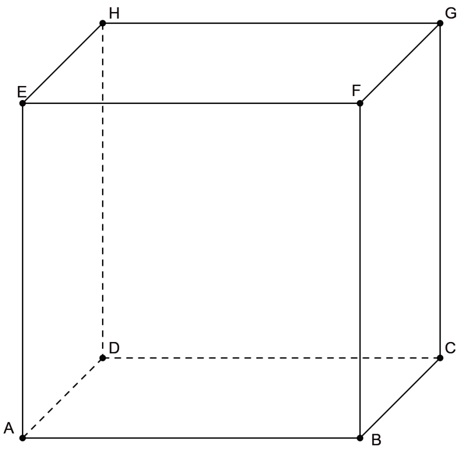
EXERCICE 1 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne le point S(2; – 1; 0) et le plan (P) d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par S et perpendiculaire à (P).
2. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de (d) et de (P).
3. Déterminer la distance du point S au plan (P).
4. On considère la sphère Σ de centre S et de rayon 4. Déterminer l'intersection de la sphère Σ et du plan (P).

EXERCICE 2 : On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.
L'espace est rapporté au repère (D ; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$).

On note P le plan d'équation $x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure la section du cube par le plan P .
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



EXERCICE 3 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) , on donne les points A(2; – 3; 1), B(5; 0; 4) et C(5; – 3; – 2).

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Soit (P) le plan d'équation $x + y + z - 9 = 0$.

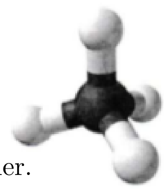
a) Montrer que (P) est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point B.
b) Soit (P') le plan orthogonal à la droite (BC) et passant par B. Déterminer une équation cartésienne de (P').
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans (P) et (P').

3. Soit D le point de coordonnées (– 1; 3; – 2).

a) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
c) Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.
d) Calculer l'aire du triangle BDC.
e) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

4. a) Déterminer une équation du plan médiateur de [AB]. Le point D appartient-il à ce plan ? Justifier.
Si non, préciser dans quel demi-espace il se situe (celui contenant A ou celui contenant B).
b) Déterminer les coordonnées du centre S de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et le rayon de cette sphère.

EXERCICE 4 : (Polynésie 14 juin 2017)



Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
Représenter la molécule dans le cube ci-contre.
Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).
2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.