EXERCICE 1 (Raisonnement par récurrence)**:**
Montrer, par récurrence, les propriétés suivantes, vraies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$;

c) $1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + ... + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ...)^2$;

f) $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 ;

g) $3*5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 ;

h) Pour tout entier naturel n, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$ et $u_0 = 0$ est bornée par 0 et 2 ;

i) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 6, $2^n \geq (n + 2)^2$;

EXERCICE 2 : 1. Parmi les suites suivantes définies pour tout entier naturel n, indiquer celles qui sont arithmétiques, géométriques ; préciser leur raison, leur variations et leur limite si elles sont convergentes :

a) $u_n = 3\times2^{2n+1}$; b) $u_n = 3\times\sqrt{n^2} + 1$; c) $u_n = \dfrac{3n+1}{n}$; d) $u_n = \dfrac{2^{-n}}{3^{n+1}}$; e) $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$;

f) $u_n = 1 + \sqrt{n}$; g) $u_n = \sqrt{2^{2n+1}}$; h) $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$; i) $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 1$; j) $u_n = 100\times\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n$.

2. Pour celles qui sont arithmétiques et géométriques, calculer la somme S_n des $n + 1$ premiers termes de la suite.
3. Pour toutes les suites, étudier les variations en émettant une conjecture, puis en la démontrant à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

EXERCICE 3 (Variations de suites)**:**
Étudier les variations des suites suivantes (il s'agit d'utiliser différentes méthodes) :

a) $u_n = \dfrac{2n-3}{5n-1}$, définie sur $\mathbb{N}$; b) $u_n = 2n + \sin(n)$, définie sur $\mathbb{N}$; c) $u_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times...\times\dfrac{2n-1}{2n}$, définie sur $\mathbb{N}^*$;

d) $u_n = \sqrt{n}+\dfrac{3}{\sqrt{n}}$, définie sur $\mathbb{N}^*$; e) $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ et $u_0 = 0$; f) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$ et et $u_0 = 1$;

EXERCICE 4 (Bornes d'une suite)**:**
Montrer que les suites suivantes sont bornées par des nombres réels à préciser :

a) $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ et $u_0 = 0$; b) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$ et $u_0 = 1$; c) $u_n = 1-\dfrac{1}{n^n}$ définie sur $\mathbb{N}^*$;

d) $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ définie sur $\mathbb{N}$;

EXERCICE 5 (Convergence d'une suite) : Étudier la convergence des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$; b) $u_n = 2n + \sin(n)$; c) $u_n = 1-\dfrac{1}{n^n}$; d) $u_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times...\times\dfrac{2n-1}{2n}$;

e) $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{2^n} - n$; f) $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ et $u_0 = 0$; g) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$ et et $u_0 = 1$.

EXERCICE 6 (une suite arithmético-géométrique) **:** Étude de suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, a et b sont des réels.

a) Dans une réserve, une population initiale de 1000 animaux évolue de la façon suivante : chaque année, 20 % des animaux disparaissent et on introduit 120 animaux supplémentaires. Décrire l'évolution de cette population au bout de n années (notée p_n et $p_0 = 1000$).

b) Au premier janvier 2004, Pierre a placé la somme de 1000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 4 %. Les intérêts acquis au cours d'une année sont capitalisés. Au premier janvier de chaque année, Pierre ajoute la somme de 100 euros au capital obtenu. Exprimer, en fonction de l'année, le capital obtenu au bout de n années (noté C_n) . Déterminer son capital au premier janvier 2020.

c) Cas général : on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = au_n + b$ où a est un réel non nul et différent de 1, et b est un réel non nul.
Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique.
En déduire v_n , puis u_n en fonction de a, b, n et α.

EXERCICE 7 : Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
1. a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.
b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.
b) Retrouver le résultat du 1.c.
3. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2(4 - u_n)$.

EXERCICE 8 : Déterminer une expression simple des nombres : $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$,

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$.

EXERCICE 9: Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :
$u_0 = 9$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.
1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique à termes positifs (préciser sa raison et son premier terme).
2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k$ en fonction de n;
en déduire la somme $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n.
3. Déterminer les limites de S_n et de T_n lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 10 : (Asie 2017)
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+4} u_n$.
On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel $v_n = (n+1)u_n$.
1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?
2. a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
b) Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563
9	7	0,00098	0,00781
10	8	0,00043	0,00391
11	9	0,00020	0,00195

EXERCICE 11 : (Pondichéry 2017)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) : la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n: $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$; la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	l3	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n).

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3\times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 12 : (Amérique du Nord 2017)

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$.

c. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

```
S ← U
Pour i allant de 1 à n
   U ← …
   S ← …
Fin Pour
```

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b. Compléter le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n:

n	0	5	10	20	30	40
u_n						

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 9 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = \ln \frac{n}{n+1}$.

1. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) et le signe des termes u_n .

2. On pose $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Exprimer s_n en fonction de n puis étudier la limite de (s_n) .

3. On pose $t_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}$. Exprimer t_n en fonction de n puis étudier la limite de (t_n) .

EXERCICE 9 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de (u_n) .

4. a) On pose $v_n = \ln u_n$. Exprimer la somme $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ en fonction de n.

b) En déduire l'expression du produit $s_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$. Étudier la limite de (s_n) .

EXERCICE 11 : Soit ϑ un réel donné dans l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2} [$; On considère la suite de nombres réels (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\cos\vartheta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

a) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de ϑ.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos \frac{\theta}{2^n}$.

c) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$.

d) Cette suite est-elle convergente ? si oui, quelle est sa limite ?

e) La suite (u_n) est-elle convergente ? si oui, quelle est sa limite ?

EXERCICE 11 :

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 9$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.

1. a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique à termes positifs (préciser sa raison et son premier terme).

b) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k$ en fonction de n; en déduire la somme $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de n.

c) Déterminer les limites de S_n et de T_n lorsque $n \to +\infty$.

2. On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout entier n. Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.