Bac S 2004
Antilles - Guyane
Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 (4 points, commun à tous les candidats).

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soi D une droite munie d'un repère $(O, \overrightarrow{i})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
   Exprimer u_n en fonction de n.
3) Comparer a_n et b_n. Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interpréter géométriquement ces résultats.
4) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
   En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous même milieu I.
6) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2 (7 points, commun à tous les candidats).

But de l'exercice : approcher $\ln(1 + a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.
Soit $a \in [0; +\infty[$.
On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{k(a)} = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{1+t}^{k+1} \mathrm{d}t$.

1) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.
3) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I_{k+1}(a) = \dfrac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$ que $I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a)$.
5) Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5 \,\mathrm{d}t$. Calculer $J(a)$.

6) (a) Démontrer que pour tout $t \in [0, a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

(b) Démontrer que pour tout $a \in [0, +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7) En déduire que pour tout $a \in [0, +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8) Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 (4 points, commun à tous les candidats).

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ C : $2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$ D : $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

2) z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A : $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ B : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ C : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ D : $4e^{i\frac{-3\pi}{4}}$

3) z s'écrit sous forme exponentielle :

A : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ B : $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ C : $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ D : $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\dfrac{7\pi}{8}$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 4 (5 points, candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité).

On considère le tétraèdre $ABCD$. On noe I le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1) (a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,-1),(D,1)\}$. Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

(b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(D,2)\}$. Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2.

(c) Démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux opints G_1 et J.

2) Soit m un réel.
On note G_m la barycentre du système de poins pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$.

(a) Préciser l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions que suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble E.

(b) Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

(c) Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

(d) En déduire l'ensemble F des points G_m lorsque m décrit l'ensemble E.

Exercice 4 (5 points, candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité).

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O. Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1) Faire une figure.

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (a) Préciser, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

   (b) Déterminer les images de R et de P par r.

   (c) Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

3) On note N le milieu du segment $[PS]$ et M eclui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (a) Déterminer les images respectives de R et de P par s.

   (b) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?

   (c) Démontrer que les points M, B, N et D sont alignés.

Feuille annexe à joindre avec la copie