Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie novembre 2004

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

   a. Calculer les affixes des points A′ et B′ images des points A et B par f.

   b. On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

   a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

   b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

   c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
   Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
   Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

EXERCICE 2 — 5 points

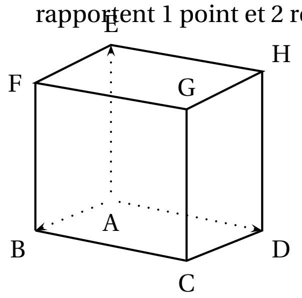
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.)

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe (page 4/4). Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit ABDEFGH un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de $\{(A, 1) ; (B, 3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de L sont :
   a. $\left(\dfrac{1}{4} ; 0 ; 0\right)$ **b.** $\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$ **c.** $\left(\dfrac{2}{3} ; 0 ; 0\right)$
2. Le plan (π) est le plan
   a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées
   a. $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{3}\right)$
4. **a.** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
   b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
   c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre FIJM est :
   a. $\dfrac{1}{36}$ **b.** $\dfrac{1}{48}$ **c.** $\dfrac{1}{24}$

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement tes résultats précédents.
2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au + bv = 1$$

alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a~;~b)$ tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que $(1 ; 1)$, $(2 ; 3)$ et $(5 ; 8)$ sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a~;~b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. **a.** Montrer que si $(x~;~y)$ est une solution différente de $(1 ; 1)$ alors $(y - x~;~x)$ et $(y~;~y + x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n~;~a_{n+1})$ est solution.
En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.