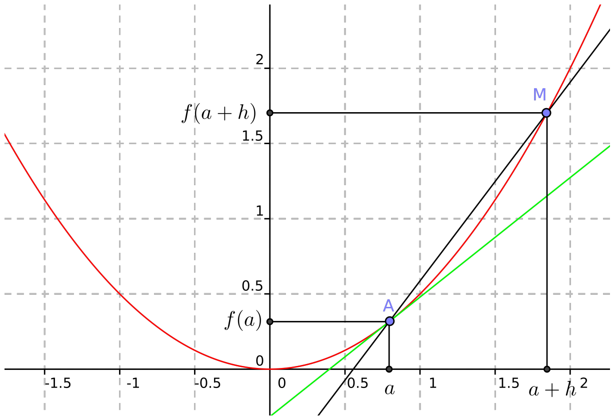
A. Nombre dérivé en un point

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}\,;\,\vec{j})$ et un réel a de I. On considère le point $A(a\,;\,f(a))$ de la courbe C_f et le point $M(a+h\,;\,f(a+h))$ pour h réel tel que $a+h$ est dans I.



Pour h non nul, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A (c'est-à-dire lorsque h tend vers 0), la droite (AM) se rapproche de la position d'une droite particulière, appelée tangente à la courbe au point A.

Définition : Si la limite lorsque h tend vers 0, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, alors on dit que la fonction f est dérivable en a et la limite est appelé le **nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$.

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Cette dernière limite est obtenu en posant $x = a + h$.

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à C_f au point A ;
l'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

B. Fonction dérivée

1. Définition : Si la fonction f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on définit alors la fonction f' qui à x associe $f'(x)$; on l'appelle la fonction dérivée de f sur I.

$f(x)$	*Dérivable sur*	$f'(x)$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples de fonctions dérivables : Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi que les fonctions cosinus et sinus. Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition. Pour déterminer les dérivées d'autres fonctions, il faut utiliser les propriétés suivantes:

2. Opérations sur les fonctions dérivées :

On considère des fonctions u et v dérivables sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$.
Le tableau ci-contre donne les dérivées de fonctions obtenues à partir de u et v :

$f(x)$	*Dérivable sur*	$f'(x)$
$ku(x)$	$D_{u'}$	$ku'(x)$
$u+v$	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u'+v'$
uv	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$D_{u'} \cap \{x$ tel que $u(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$D_{u'} \cap D_{v'} \cap \{x\,;\,v(x) \neq 0\}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$D_{u'}$	$nu'u^{n-1}$
$u(ax+b)$	$D_{u'}$	$au'(ax+b)$

C. Applications des dérivées

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;
Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;
Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

2. Extremas d'une fonction : Soit $a \in$ I distinct des extrémités de I ; si f admet un extremum local en a,
alors $f'(a) = 0$. (Extremum : maximum ou minimum)
Réciproquement : si $f'(a) = 0$ et f' change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

3. Monotonie : Si f est dérivable sur I et strictement monotone, alors pour tout c de $f(\mathrm{I})$, il existe un unique k de I tel que $f(k) = c$.
Applications : f dérivable sur $]a\,;\,b[$ et strictement monotone, $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors il existe un unique α de $]a\,;\,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 1 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; b) $f(x) = 3x^2 - 18x - 54$; c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 4$; d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$;

e) $f(x) = x\sqrt{x}$; f) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$; g) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$;

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions proposées, préciser son ensemble de définition, déterminer sa fonction dérivée, puis étudier les variations de la fonction sur son ensemble de définition.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$; c) $f(x) = 2x^2 - 7$;

d) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 1$; e) $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x}$; f) $f(x) = \dfrac{9x^2-10x+1}{x}$;

g) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$; h) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$; i) $f(x) = 2\sqrt{x} - x + 3$;

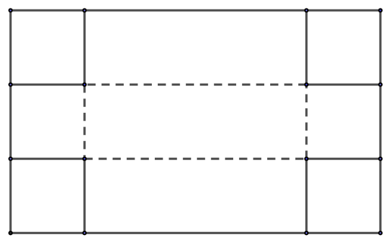
j) $f(x) = x\sqrt{x} - 2x - 1$; k) $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x - 6$; l) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$;

Exercice 3 : Déterminer les extremums des fonctions suivantes et les valeurs de x correspondantes, après avoir préciser leur ensemble de définition.

a) $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{3x}{9+x^2}$; c) $f(x) = \dfrac{2x^2-8x+1}{4x+2}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{2x^2+3x-2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$; f) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x}$; g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)} + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 4 : On considère un rectangle de périmètre 60 cm.
Trouver les dimensions du rectangle dont l'aire est maximale.



Exercice 5 : On réalise une boîte parallélépipédique à partir d'un rectangle de dimensions 5 et 8 cm, en découpant quatre carrés dans les coins du rectangle de même dimensions et en pliant suivant les pointillés sur la figure ci-contre.
Quelle doit être la dimension d'un carré pour que le volume de la boîte soit maximal ?

Exercice 6 : Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de 300 cm² ;
Les marges doivent faire 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.
Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?
Pour cela, trouver une relation entre la longueur et la largeur d'une page, et écrire l'aire d'une page en fonction de l'une des dimensions.

Exercice 7 : But : Comment fabriquer une casserole de 1 litre avec le moins de métal possible ?
On ne s'occupe pas du manche de la casserole.
On note x le rayon du disque de base et h la hauteur de la casserole (les dimensions sont en cm).
1. Déterminer l'aire totale S(x) de la casserole composée de l'aire du disque et de l'aire latérale correspondant à un cylindre. Préciser l'ensemble de définition de cette fonction S.
2. Étudier les variations de la fonction S sur son ensemble de définition.
3. En déduire le minimum de la fonction S, la valeur de x correspondante et la valeur de h correspondante.
Que remarque-t-on ?

Exercice 8 : a) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Étudier la fonction f, c'est-à-dire donner l'ensemble de définition D_f, les variations sur D_f, les extremums.
Dresser son tableau de variations et tracer sa courbe dans un repère du plan.

b) On considère alors les fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

A l'aide de la fonction f, faire l'étude des fonctions g et h.