RÉSUMÉ PREMIÈRE LES POLYNÔMES

Polynôme de degré 2 :

1. Définition : On l’appelle aussi le trinôme du second degré, et on le note $ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des nombres réels et $a \neq 0$. On peut le factoriser :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right].$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé le discriminant du polynôme. On a alors $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$ appelée *forme canonique du trinôme.*

2. Variations : Le tableau de variations d'un polynôme du seconde degré $f(x) = ax^2 + bx + c$:

Si $a > 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	m	↗ $+\infty$

Si $a < 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	M	↘ $-\infty$

3. Représentation graphique : La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une parabole.

Le sommet de la parabole (P) a pour coordonnées ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$).

La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole (P).

4. Résolution d’équation : On peut alors résoudre **l’équation $ax^2 + bx + c = 0$** : Trois cas se présentent :

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; alors $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l’équation n’a pas de solution.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; alors l’équation devient $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ et la solution est $x = \frac{-b}{2a}$

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; alors $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ se factorise (en utilisant: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$) :

$(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$ et on obtient les solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas , on obtient la factorisation : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

5. Signe du trinôme : Signe de $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x :

Si $\Delta < 0$		Si $\Delta = 0$			Si $\Delta > 0$ (on suppose $x_1 < x_2$)				
x	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$	$-b/(2a)$	$+\infty$	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de a	0	signe de a	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Exercice 1 :

1. Déterminer la forme canonique des polynômes du second degré suivants :

$P_1(x) = 2x^2 + 8x - 10$; $P_2(x) = x^2 - 6x + 2$; $P_3(x) = 9x^2 + 12x + 4$;

$P_4(x) = x^2 + 6x + 10$; $P_5(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{9}$.

2. Résoudre alors l'équation $P_i(x) = 0$ pour $i = 1$ à 5.
3. Préciser la représentation graphique de chaque polynôme ; donner l'axe de symétrie de la courbe ainsi que le sommet.
4. Donner le tableau de variations de chaque polynôme.
5. Donner le tableau de signes de chaque polynôme.

Exercice 2 : On considère un rectangle dont le périmètre est égal à 200 cm et son aire est égale à 2100 cm^2. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

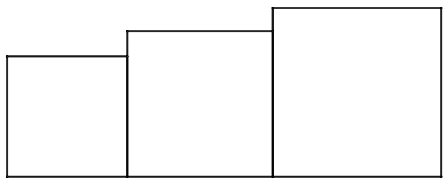
Exercice 3 : On considère un rectangle dont le périmètre est égal à 12 cm.
On pose x une des dimensions du rectangle.
1. Déterminer son aire en fonction de x.
2. Trouver x pour que l'aire soit supérieure ou égale à 5 cm^2.
3. Trouver x pour que l'aire soit maximale.

Exercice 4 : Trouver deux nombres dont la somme vaut 57 et le produit 540.

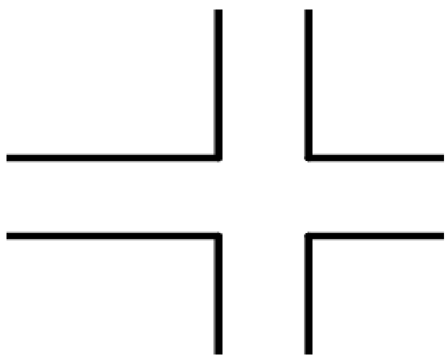
Exercice 5 : On considère le segment [AB] de longueur 10 et le point M sur [AB]. On construit les demi-cercles de diamètre [AB], [AM] et [BM] d'un même côté du segment [AB].
On définit ainsi une aire comprise entre ces trois demi-cercles.
Trouver la position du point M pour que cette aire soit maximale.

Exercice 6 : On dispose d'une baguette de 10 cm de longueur. On la coupe pour former deux morceaux qui composent les côtés d'un rectangle. Où couper la baguette pour que l'aire du rectangle soit égale à 20 cm^2 ?

Exercice 7 :
Sur la figure suivante le premier carré a pour côté n,
le deuxième $n + 1$ et le troisième $n + 2$.
Trouver n pour que la somme des aires des carrés soit égale à 15125.



Exercice 8 : Le drapeau ci-contre est composé d'une croix de largeur x ; ses dimensions sont 4 m sur 3 m.
Trouver x sachant que l'aire de la croix est égale à la moitié de l'aire du drapeau.



Exercice 9 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole représentative de la fonction carrée et du cercle de centre O et de rayon 1.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de l'hyperbole représentative de la fonction inverse et du cercle de centre O et de rayon 2.