A. Probabilité d'un événement : On définit, sur une expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i . On note $P(\{e_i\}) = p_i$.
La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des p_i pour tous les éléments e_i de A.
Propriétés des probabilités : $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$; pour tout événement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Cas de l'équiprobabilité : si tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ ont la même probabilité, qui est dans ce cas $P(\{e_i\}) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$, alors $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

B. Probabilités conditionnelles :
1. Définition : Soit A un événement de l'univers tel que $P(A) \neq 0$. On définit sur une nouvelle probabilité, notée P_A , telle que pour tout événement B, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Cette probabilité P_A est appelée la probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. Remarque : On a donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

2. Propriétés: a) Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.
b) Soient A, B et C trois événements tels que $P(A) \neq 0$. Si A et B sont disjoints (ou incompatibles), alors $P_A(B) = 0$. Si C est contenu dans B (ou inclus dans B), noté $C \subset B$, alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.
$P_A(B \cup C) = PA(B) + PA(C) - P_A(B \cap C)$. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

3. Formule des probabilités totales
a) Notion de partition : On dit que les événements A_1, A_2, A_3, ..., A_n forment une partition de l'univers, si l'intersection des événements pris deux à deux est vide et si la réunion de tous ces événements est l'univers .
b) Théorème : Soient A_1, A_2, A_3, ..., A_n , n événements de probabilité non nulle formant une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) =$
$P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + P_{A_3}(B) \times P(A_3) + ... + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$.
c) Remarque: Si A n'est pas vide, les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω.
Ainsi, pour tout événement B, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

4. Indépendance d'événements
Définition: On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Propriétés : Soient A et B deux événements de l'univers, de probabilité non nulle. A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.
Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

C. Variables aléatoires : Si, à chaque issue e_i de l'expérience aléatoire, on associe un réel x_i, on définit alors une variable aléatoire X, qui à e_i associe x_i .
La variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i .
On note : $P(\{X = x_i\}) = p_i$. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité P' , appelé loi de la variable aléatoire X.
On définit alors : L'espérance mathématique de X, notée E(X), comme la moyenne pondérée des x_i affectés des coefficients p_i : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.
La variance de X, notée V(X), comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des x_i :
$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2$.
L'écart-type de X , noté s(X), comme la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 1 : On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.
L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.
1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
b) Déterminer son espérance mathématique et son écart-type.
2. La variable aléatoire Y est égale à la différence positive entre les deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
b) Déterminer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 2 : Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints de la maladie Ma, 20% ont une maladie Mb et parmi les individus non atteints de la maladie Ma, 4% ont la maladie Mb. *Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme décimale à 0,001 près.*
On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants:
"l'individu est atteint de la maladie Ma", "l'individu est atteint de la maladie Mb".
a) Donner les valeurs de P(A), $P_A(B)$ et $P_A(\overline{B})$, ($P_A(B)$ désignant la probabilité de B sachant A).
b) Calculer $P(B \cap A)$ et $P(B \cap \bar{A})$. En déduire P(B).
c) Calculer $P_B(A)$. Traduire cette probabilité par un événement.

Exercice 3 : On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 70% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo, et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,85; on ne constate aucune baisse de taux pour 90% des personnes ayant pris le placebo. On appelle: M l'événement "avoir pris le médicament", $\overline{M}$ l'événement contraire,
B l'événement "avoir une baisse du taux de glycémie", $\overline{B}$ l'événement contraire.
1. Calculer la probabilité P(B) de l'événement B.
2. On soumet au test un individu pris au hasard.
3. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?

Exercice 4 : On étudie les familles de trois enfants. On considère que la probabilité d'avoir une fille est égale à celle d'avoir un garçon. On pose X la variable aléatoire égale au nombre de filles de la famille.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 5 : Les trois commerciaux d'une entreprise ont respectivement une probabilité de 0,1 ; 0,2 ; 0,3 de conclure un contrat chaque jour ouvrable.
La probabilité, pour chacun d'eux, de signer plusieurs contrats est nulle.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de contrats signés pour l'entreprise un jour donné.
1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de signer au moins un contrat ?
3. Calculer la probabilité $p(X < 2)$.
4. Déterminer l'espérance mathématique de X et son écart-type.

Exercice 6 : Une urne contient n boules ($n \geq 7$) indiscernables au toucher dont 7 sont noirs et les autres sont blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes lors d'un tirage.
1. Déterminer la loi de X en fonction de n.
2. Déterminer l'espérance mathématique de X en fonction de n.
3. Déterminer n pour que cette espérance soit maximale.

Exercice 7 : Une urne contient 5 boules rouges et trois boules blanches ; un joueur a le choix entre deux jeux :
Jeu 1 : le joueur tire simultanément 2 boules de l'urne ;
Jeu 2 : le joueur tire successivement les deux boules avec remise.
Dans les deux cas, si les deux boules sont rouges, il perd 3 €, si les deux boules sont blanches, il perd 10 €, si les couleurs sont différentes, il gagne 4 € .
Soient X et Y les variables aléatoires respectives des gains du joueur des deux jeux.
1. Donner les lois de probabilité de X et de Y.
2. Quel est le jeu le plus intéressant pour le joueur ?

Exercice 8 : Les mêmes types de réacteurs équipent deux types d'avions : biréacteurs ou quadriréacteurs.
La probabilité qu'une panne survienne à l'un de ces réacteurs est p (p est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1).
On suppose que les avaries pouvant survenir sur les réacteurs sont indépendantes les unes des autres.
X est la variable aléatoire égale au nombre de réacteurs ayant une panne sur un biréacteur.
Y est la variable aléatoire égale au nombre de réacteurs ayant une panne sur un quadriréacteur.
1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Un avion peut poursuivre son vol sans escale si au moins la moitié de ses réacteurs fonctionnent.
Calculer les probabilités p_{B} et p_{Q} pour qu'un biréacteur ou un quadriréacteur achève son vol après une avarie de moteurs.
3. Vérifier que $p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{Q}} = p^2(p-1)(1-3p)$.
4. Indiquer suivant les valeurs de p quel type d'avion présente la meilleure fiabilité.

Exercice 9 : Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :
- S'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,8.
- S'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.
- La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A_n l'événement : « le gardien de but arrête le n-ième tir ». On a donc $\mathrm{p}(\mathrm{A}_1) = 0{,}7$.
1. a) Donner, pour n supérieur ou égal à 1, les valeurs de $p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})$.
b) Réaliser un arbre pondéré avec les événements A_n et A_{n+1} .
c) Exprimer $p(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_{n+1})$ et $p(\overline{\mathrm{A}_n} \cap \mathrm{A}_{n+1})$ en fonction de $p(\mathrm{A}_n)$.
d) En déduire que, pour n supérieur ou égal à 1, $p(\mathrm{A}_{n+1}) = 0{,}2\, p(\mathrm{A}_n) + 0{,}6$.
2. On pose à présent, que pour tout entier n plus grand ou égal à 1, $p_n = p(\mathrm{A}_n)$ et $u_n = p_n - 0{,}75$.
a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
c) Montrer que la suite (p_n) admet une limite que l'on calculera.
Interpréter cette limite pour le gardien de but.

Exercice 10 : On lance une pièce de monnaie équilibrée et on s'arrête la première fois que l'on obtient Face.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers.
1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de l'événement « le nombre de lancers est supérieur ou égal à 3 ».
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et son écart-type.

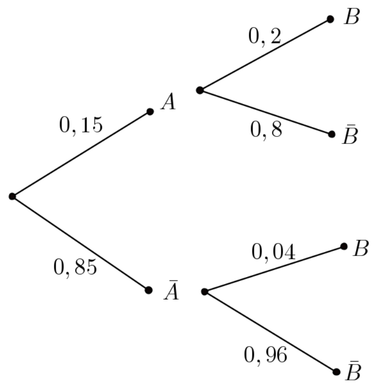
Exercice 1 : On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.
L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.
1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés prend les valeurs {4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.
a) La loi de la variable aléatoire X :
b) Son espérance mathématique est égale à 7 ;
et son écart-type est environ 1,58.

x_i	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

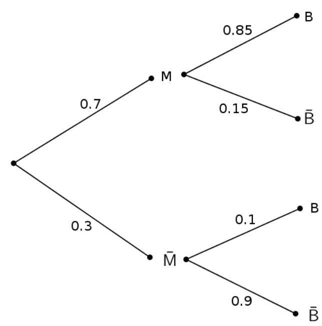
2. La variable aléatoire Y est égale à la différence positive entre les deux jetons tirés prend les valeurs {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.
a) La loi de la variable aléatoire Y :
b) Son espérance mathématique est égale à 2,125
et son écart-type est environ 1,41.

y_i	0	1	2	3	4	5
$p(Y = y_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 2 : a) P(A) = 0,15 ; $P_A(B)$ = 0,2 et $P_A(\overline{B})$) 0,8.
b) P(B) = P(B ∩ A) + P(B ∩ $\bar{A}$) = $P_A(B)$ × P(A) + $P_{\bar{A}}$ (B)× P($\bar{A}$) =
0,2×0,15 + 0,04×0,85 = 0,064,
soit 6,4% des individus de la population sont atteint de la maladie Mb.
c) $P_B(A) = \dfrac{p(B\cap A)}{p(B)} = \dfrac{0{,}2\times 0{,}15}{0{,}064} = 0{,}28.$
Traduire cette probabilité par un événement : La probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie Ma sachant qu'elle est atteinte de la maladie Mb est égale à 0,28.



Exercice 3 : L'arbre de probabilités :
1. La probabilité P(B) = p(B∩M) + p(B∩ $\overline{M}$) = 0,7×0,85 + 0,3×0,1 = 0,625.
2. On soumet au test un individu pris au hasard.
La probabilité qu'il ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie est égale à
$$p_{\overline{B}}(M) = \frac{p(\overline{B}\cap M)}{p(\overline{B})} = \frac{0{,}7\times 0{,}15}{1-0{,}625} = \frac{0{,}105}{0{,}375} = 0{,}28.$$



Exercice 5 : Les trois commerciaux d'une entreprise ont respectivement une probabilité de 0,1 ; 0,2 ; 0,3 de conclure un contrat chaque jour ouvrable.
La probabilité, pour chacun d'eux, de signer plusieurs contrats est nulle.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de contrats signés pour l'entreprise un jour donné.
1. X prend ses valeurs dans {0 ; 1 ; 2 ; 3}. La loi de X :
p(X = 0) = 0,9×0,8×0,7 = 0,504 ;
p(X = 1) = 0,9×0,8×0,3 + 0,9×0,2×0,7 + 0,1×0,8×0,7 = 0,398 ;
p(X = 2) = 0,9×0,2×0,3 + 0,1×0,2×0,7 + 0,1×0,8×0,3 = 0,092 ;
p(X = 3) = 0,1×0,2×0,3 = 0,006 ;

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,504	0,398	0,092	0,006

2. La probabilité de signer au moins un contrat est p(X ≥ 1) = 1 – p(X = 0) = 0,994.
3. La probabilité p(X < 2) = 0,504 + 0,398 = 0,902.
4. L'espérance mathématique de X est E(X) = 0,6 et son écart-type σ(X) ≃ 0,678.

Exercice 6 :

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont $\{1 ; 2\}$.

$p(X = 1) = p(\text{tirer deux boules de même couleur}) = p(2 \text{ blanches U } 2 \text{ noires}) = \frac{n-7}{n}\times\frac{n-7}{n} + \frac{7}{n}\times\frac{7}{n} = \frac{(n-7)^2+7^2}{n^2} = \frac{n^2-14n+98}{n^2}$; $p(X = 2) = p(\text{tirer une blanche et une noire}) = 2\times\frac{n-7}{n}\times\frac{7}{n} = \frac{14n-98}{n^2}$.

D'où la loi de X :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2-14n+98}{n^2}$	$\frac{14n-98}{n^2}$

2. L'espérance mathématique de X est égale à $1 \frac{n^2-14n+98}{n^2} + 2 \frac{14n-98}{n^2} = \frac{n^2-14n+98+28n-196}{n^2} = \frac{n^2+14n-98}{n^2}$.

3. Cette espérance est maximale si $\frac{n^2+14n-98}{n^2}$ est maximale.

On étudie cette fonction f définie sur $[7 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+14x-98}{x^2}$.

Cette fonction est dérivable sur $[7 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{(2x+14)x^2-(x^2+14x-98)2x}{x^4} = \frac{2x^3+14x^2-2x^3-28x+196x}{x^4}$

$= \frac{-14x^2+196x}{x^4} = \frac{14(-x+14)}{x^3}$ qui est du signe de $-x+14$ puisque les autres facteurs sont strictement positifs.

D'où le tableau de variations :

x	7		14		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	1,5	↘	

Donc l'espérance est maximale égale à 1,5 lorsque $n = 14$.

Exercice 7 :

1. La loi de probabilité de X :

Donner les lois de probabilité de X et de Y.

x_i	− 10	− 3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$

y_i	− 10	− 3	4
$p(Y = y_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{30}{64}$

2. Pour savoir quel est le jeu le plus intéressant pour le joueur, on calcule les espérances mathématiques : $E(X) = -10\times\frac{3}{28} - 3\times\frac{10}{28} + 4\times\frac{15}{28} = 0$

$E(Y) = -10\times\frac{9}{64} - 3\times\frac{25}{64} + 4\times\frac{30}{64} = \frac{-45}{64}$.

Donc il vaut mieux utiliser le jeu 1 ; ce jeu est d'ailleurs équitable puisque $E(X) = 0$.

Exercice 8 :

1. La loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

La loi de probabilité de Y :

k	0	1	2
$P(Y = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

2. L'espérance mathématique de X est $E(X) = 4p$ et celle de Y est $E(Y) = 2p$.

3. La probabilité que l'avion A arrive à destination est $P(X \leq 2) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2$.

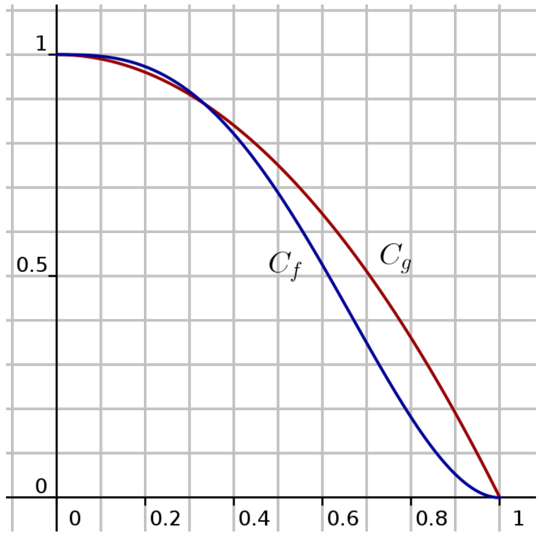
4. La probabilité que l'avion B arrive à destination est $P(Y \leq 1) = (1-p)^2 + 2p(1-p)$.

5. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] égale à la probabilité que l'avion A arrive à destination, et g la fonction définie sur [0 ; 1] égale à la probabilité que l'avion B arrive à destination.

a) D'après la question précédente, $g(x) = (1 - x)^2 + 2x(1 - x) = (1 - x)(1 - x + 2x) = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$.

b) D'après la question 3, $f(x) = (1 - x)^4 + 4x(1 - x)^3 + 6x^2(1 - x)^2 = (1 - x)^2 [(1 - x)^2 + 4x(1 - x) + 6x^2] = (1 - x)^2 [1 - 2x + x^2 + 4x - 4x^2 + 6x^2] = (1 - x)^2(3x^2 + 2x + 1)$.

c) Le tracé des courbes représentatives des deux fonctions :



Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geqslant g(x)$ sont dans l'intervalle [0 ; 3,2] environ.

6. Si $p \leq \frac{1}{3}$, l'avion le plus sûr est l'avion A, sinon, c'est l'avion B.

Résolution de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$:

$(1 - x)^2(3x^2 + 2x + 1) \geqslant (1 - x)(1 + x)$.

Comme $x \in [0 ; 1]$, $1 - x \geq 0$, donc on peut simplifier par $1 - x$: $(1 - x)(3x^2 + 2x + 1) \geqslant 1 + x$.

On développe le membre de gauche :

$3x^2 + 2x + 1 - 3x^3 - 2x^2 - x \geqslant 1 + x$ équivaut à

$-3x^3 + x^2 + x + 1 \geqslant 1 + x$ équivaut à $-3x^3 + x^2 \geqslant 0$ équivaut à $x^2(-3x + 1) \geqslant 0$ équivaut à $-3x + 1 \geqslant 0$ puisque que x^2 est toujours positif.

D'où $x \leq \frac{1}{3}$; la solution est $[0 ; \frac{1}{3}]$.

Exercice 9 : Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- S'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,8.
- S'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.
- La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A_n l'événement : « le gardien de but arrête le n-ième tir ». On a donc $p(A_1) = 0{,}7$.

1. a) Donner, pour n supérieur ou égal à 1, les valeurs de $p_{A_n}(A_{n+1})$ et $p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

b) Réaliser un arbre pondéré avec les événements A_n et A_{n+1} .

c) Exprimer $p(A_n \cap A_{n+1})$ et $p(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$ en fonction de $p(A_n)$.

d) En déduire que, pour n supérieur ou égal à 1, $p(A_{n+1}) = 0{,}2\, p(A_n) + 0{,}6$.

2. On pose à présent, que pour tout entier n plus grand ou égal à 1, $p_n = p(A_n)$ et $u_n = p_n - 0{,}75$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (p_n) admet une limite que l'on calculera.

Interpréter cette limite pour le gardien de but.

Exercice 10 : (plus difficile, car les valeurs prises par X sont tous les entiers naturels...)

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on s'arrête la première fois que l'on obtient Face.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers.

1. La loi de X :

x_i	1	2	3	4	5	6	...	n	...
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$		$\frac{1}{2^n}$	

2. La probabilité de l'événement « le nombre de lancers est supérieur ou égal à 3 » est égale à

$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

3. On remarque que $p(X = n)$ est le terme d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

On sait calculer la somme des termes consécutifs de cette suite : $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

cette somme tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

L'espérance mathématique de X est égale à E(X) = $\sum_{k=1}^{k=n} k u_k$ = ...

et son écart-type.