RÉSUMÉ PREMIÈRE LES SUITES NUMERIQUES

A. Notation - Définition

Définition : une suite numérique (u_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note (u_n) la suite de nombres u_0, u_1, u_2,..., u_n, ... Le nombre u_n est le terme d'indice n (ou de rang n).
u_0 est le premier terme de la suite.

B. Les suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$. Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.
Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : S $= n \times$ (demie somme des termes extrêmes).

Exemples : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$;

la somme des n premiers entiers consécutifs non nuls est égale à $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

C. Les suites géométriques

La suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : Si $q \neq 1$, S = premier terme $\times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

et si $q = 1$, S $= n \times$ premier terme.

Exemples : (si $q \neq 1$), $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

D. Sens de variation d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est **strictement croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite (u_n) est **strictement décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
Technique : a) on peut chercher à comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0, ou si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
b) Si $u_n = f(n)$, alors les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donne les variations de (u_n).

E. Limite d'une suite

Définition : Une suite (u_n) est une suite **convergente** vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Le nombre réel l est la limite de la suite (u_n), on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente (sa limite est infinie ou n'existe pas).

EXERCICE 1 : 1. Pour chacune des suites numériques suivantes définies sur $\mathbb{N}$, déterminer les quatre premiers termes de la suite sans l'aide de la calculatrice :

a) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = 3$; b) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = 1$; c) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = -1$;

d) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$; e) $u_n = 10^n - 1$; f) $u_n = 2^n - 1$; g) $u_n = n^2 - 4n + 1$;

h) $u_n = \sqrt{2+n}$; i) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; j) $u_{n+1} = u_n - n$ et $u_0 = 1$;

k) $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_0 = 1$; l) $u_{n+1} = u_n - 5$ et $u_0 = 10$. m) $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ et $u_0 = 0$.

2. Préciser celles qui sont arithmétiques et celles qui sont géométriques.
3. Conjecturer les variations de la suite.
4. Démontrer si possible cette conjecture.
5. Lorsque c'est possible, calculer u_{20} .
6. Lorsque c'est possible, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=20} u_k$.
7. Conjecturer la limite de la suite si elle existe.

EXERCICE 2 : On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = n^2 - 2n + 3$;
1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang à déterminer.
3. Montrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un entier n tel que $u_n > A$.
4. L'algorithme ci-contre permet de trouver le plus petit entier n pour lequel $u_n > 10^6$.
Déterminer cet entier n.

```
A = 10**6
n = 0
u = 3
while (u <= A) :
   u = n**2 - 2*n + 3
   n = n + 1
print("le plus petit entier n tel que un > A est :", n)
```

EXERCICE 3 : On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$ et $u_0 = 1$;
1. Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près des quatre premiers termes de la suite
2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n).
3. On admet que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
a) Montrer que pour tout réel x dans $[1 ; 2]$; $2x - x^2 \geq 0$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire les variations de la suite (u_n).
3. Reprendre toutes les questions dans le cas où $u_0 = 4$.

EXERCICE 4 : On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 2n + 1$ et $u_0 = 0$.
1. Calculer les valeurs des cinq premiers termes de la suite.
2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.