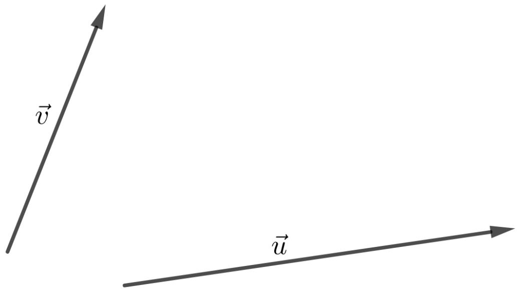
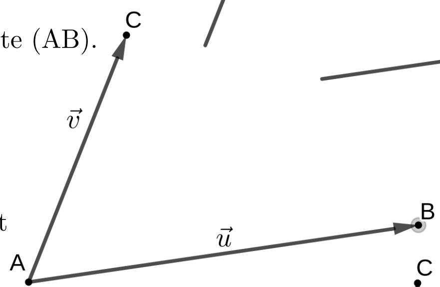
1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs :

a) Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques du plan. On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ par

$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$.





b) Projeté orthogonal :

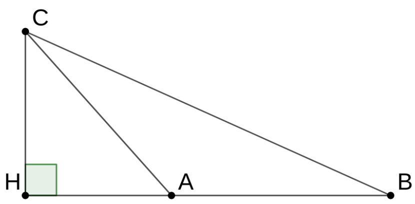
On considère les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

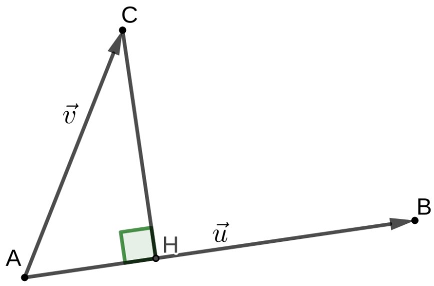
Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$; alors

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens;

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\,\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.





2. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et tout réel k,

$(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.

$\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

b) Égalités remarquables :

$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;

$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;

$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right).$$

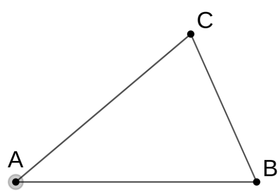
Dans un repère orthonormé du plan, avec $\vec{u}\,(x;\,y)$ et $\vec{v}\,(x';\,y')$, $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

3. Orthogonalité dans le plan :

a) Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques du plan. On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

b) Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

4. Formule d'Al Kashi :



On considère un triangle ABC. Alors $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}\times\cos(\widehat{\mathrm{ACB}})$.

De même, $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\times\cos(\widehat{\mathrm{ABC}})$ et

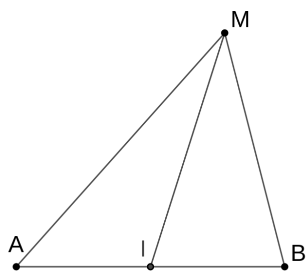
$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$.

4. Transformation de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$:

On considère deux points A et B distincts et I le milieu de [AB].

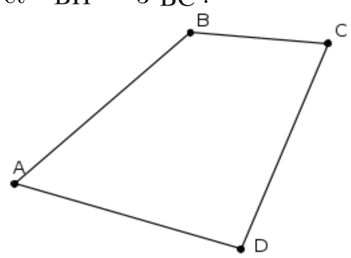
Alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \mathrm{MI}^2 - \dfrac{\mathrm{AB}^2}{4}$.

Cette relation est appelée formule de la médiane.



Exercice 1 : On considère le triangle ABC et les points I, J et K définis par $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$,
J est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.
1. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 2 : On considère le quadrilatère ABCD ci-dessous et les points E, F, G et H définis par :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, F est le milieu de [ED], $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{BC}$.
1. Compléter la figure.
2. Montrer que le point E est le milieu du segment [AH].
3. Les points F, G et H sont-ils alignés ?



Exercice 3 : On considère le parallélogramme ABCD et les points P et Q définis par : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et Q est le symétrique du milieu I du segment [AB] par rapport à A.
a) Le but de cette question est de montrer que les points P, Q et C sont alignés de deux manières différentes:
 1) En utilisant la colinéarité des vecteurs;
 2) En utilisant un repère du plan bien choisi et les coordonnées des points de la figure.
b) Montrer que les segments [DI] et [QC] se coupent en leur milieu.
c) Montrer que le point P est le centre de gravité du triangle DQI.

Exercice 4 : Soit un triangle ABC et I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Le point L est le milieu de [JC] et M est le symétrique de K par rapport à B.
Par une méthode similaire à l'activité 1, vérifier si les points I, L et M sont alignés.

Exercice 5 : Soit ABCD un carré, E le milieu de [AB] et F celui de [BC].
Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), déterminer les coordonnées du point H, intersection des droites (DE) et (AF).
Montrer que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 6 : Dans un repère du plan, on considère les points A(– 3 ; – 2), B(5 ; 2), C(0 ; 3) et D(– 2 ; 2).
1. Montrer que ABCD est un trapèze.
2. Trouver les coordonnées du point K intersection des diagonales du trapèze.
3. Trouver les coordonnées du point J intersection des droites (AD) et (BC).
4. Montrer que la droite (JK) passe les milieux de deux côtés du trapèze.

Exercice 7 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On considère les points A(3; – 1), B(1; 3) et C(– 2 ; 1).
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les longueurs AB et BC.
3. En déduire, au degré près, une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

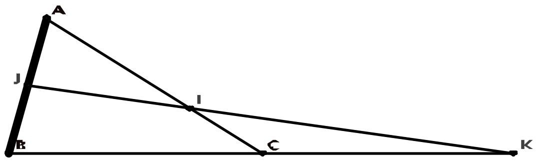
Exercice 8 : Déterminer une mesure des angles du triangle ABC tel que AB = 5, AC = 7 et BC = 8.
En déduire l'aire de ce triangle. Déterminer la longueur de la médiane [AI] et de la hauteur [AH].

Exercice 9 : On considère le carré direct ABCD de côté 1 et les triangles équilatéraux directs CBF et DCE.
En utilisant un repère orthonormé d'origine A, montrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires et que BE = AF.

Exercice 10 : On considère le triangle ABC tel que AB = 18 cm, BC = 15 cm et l'aire du triangle est égale à 108 cm². Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 1 :

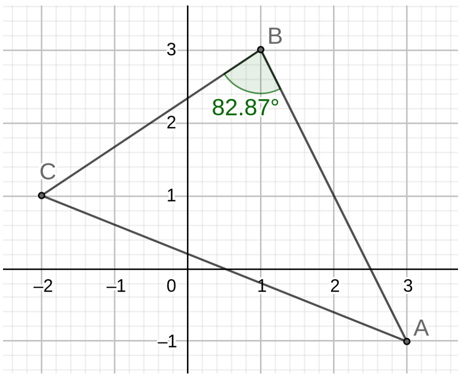
1. La figure ci-contre :



2. Pour montrer que les points I, J et K sont alignés, on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\,\overrightarrow{JI}$:

on sait que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$;

et $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; d'où $\overrightarrow{JK} = 3\,\overrightarrow{JI}$; les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, donc les les points I, J et K sont alignés.



Exercice 7 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère les points A(3; – 1), B(1; 3) et C(– 2 ; 1).

1. Les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{BA}$ (2 ; – 4) et $\overrightarrow{BC}$ (– 3 ; – 2) ;

d'où le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\times(-3) + (-4)\times(-2) = 2$.

2. Les longueurs AB $= \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et

BC $= \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

3. On sait que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$,

d'où $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{65}}$,

et $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{65}}\right) \simeq 83°$ au degré près.

Exercice 8 :

1. Pour déterminer une mesure des angles du triangle ABC tel que AB = 5, AC = 7 et BC = 8, on utilise la formule d'Al Kashi :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos(\widehat{ACB})$,

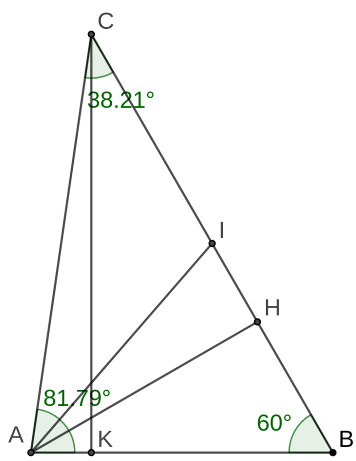
d'où $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\times AC\times BC} = \dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\times7\times8} = \dfrac{11}{14}$ et $\widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{14}\right) \simeq 38{,}2°$.

De même, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$,

d'où $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC} = \dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8} = \dfrac{1}{2}$ et $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60°$.

De même, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$,

d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC} = \dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7} = \dfrac{1}{7}$ et $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right) \simeq 81{,}8°$.



2. Considérons la hauteur CK issue de C ; l'aire du triangle ABC est $\dfrac{AB\times CK}{2}$;

de plus, par la trigonométrie du triangle rectangle, $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{CK}{BC}$,

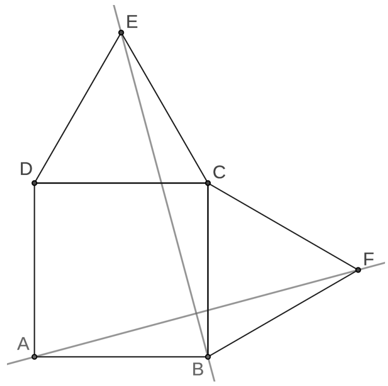
donc $CK = BC\times\sin(\widehat{ABC})$, donc aire(ABC) = $\dfrac{AB \times BC \times \sin(\widehat{ABC})}{2} = \dfrac{5 \times 8 \times \sin(60)}{2} = 10\sqrt{3}$.

3. Par la formule de la médiane, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$,

d'où $AI^2 = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + 16 = 5 \times 7 \times \dfrac{1}{7} + 16 = 21$, donc $AI = \sqrt{21}$.

aire(ABC) = $\dfrac{BC \times AH}{2}$, donc $AH = 2\,\dfrac{\text{aire}(ABC)}{BC} = \dfrac{2 \times 10\sqrt{3}}{8} = 2{,}5\sqrt{3}$.

<u>Exercice 9 :</u> Dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$, on obtient les coordonnées des points A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1) et D(0 ; 1).



Le point E est sur la médiatrice de [CD] d'équation $x = 0{,}5$, donc $x_E = 0{,}5$;
pour trouver son ordonnées on utilise l'égalité DE = DC, soit $DE^2 = DC^2$,
soit $(x_E - 0)^2 + (y_E - 1)^2 = 1$; soit $0{,}25 + y_E^2 - 2y_E + 1 = 1$;
soit $y_E^2 - 2y_E + 0{,}25 = 0$; on résout cette équation :
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}25 = 3 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}134$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}866$.

L'ordonnée de E est supérieure à celle de D, donc $y_E > 1$, donc $y_E = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Par la même méthode, on trouve $x_F = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ et $y_F = 0{,}5$.

D'où $\overrightarrow{AF}\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0{,}5\right)$ et $\overrightarrow{BE}\left(-0{,}5\ ;\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$; d'où $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}(-0{,}5) + 0{,}5\,\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux et les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

De plus, $AF = \sqrt{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0{,}5^2}$ et $BE = \sqrt{(-0{,}5)^2 + \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{0{,}5^2 + \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = AF$.

<u>Exercice 10 :</u> On considère le triangle ABC tel que AB = 18 cm, BC = 15 cm et l'aire du triangle est égale à 108 cm². Déterminer la nature du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{AB \times BC \times \sin(\widehat{ABC})}{2} = 108$, donc $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{2 \times 108}{18 \times 15} = \dfrac{4}{5}$; en utilisant la propriété : pour tout réel a, $\cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$,

on obtient $\cos(\widehat{ABC})^2 = 1 - \sin(\widehat{ABC})^2 = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{25-16}{25} = \dfrac{9}{25} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$,

donc $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$ ou $\cos(\widehat{ABC}) = -\dfrac{3}{5} = -0{,}6$. Il y a donc deux solutions :

Ainsi, par la formule d'Al Kashi dans le triangle ABC,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = 18^2 + 15^2 - 2 \times 18 \times 18 \times 0{,}6 = 225 = 15^2$, donc AC = 15.
Le triangle ABC est donc isocèle en C.

ou $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) =$
$18^2 + 15^2 - 2 \times 18 \times 18 \times (-0{,}6) = 873$, donc $AC = \sqrt{873}$.
Le triangle ABC est quelconque.