# Baccalauréat S La Réunion juin 2004

**Exercice 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $0$ | ↗ $1$ |

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et son asymptote $\Delta$, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

### A - Lecture graphique

1. $k$ est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de $k$ le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. $n$ étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

### B - Définition et étude de deux suites

1. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions $u_n$ et $v_n$ respectivement comprises dans les intervalles $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels $u_n$ et $w_n$ pour $n$ appartenant à l'ensemble $\{2\ ;\ 3\ ;4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
   Procéder de même pour la suite $(v_n)$. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1 + \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.

Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan différent de A, d'affixe $z$, associe le point $M'$ du plan d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les images de B et de C par l'application $f$.

   **b.** Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de i, on a la relation :

$$(z' - \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1.$$

**c.** Soit D le point d'affixe $1 + 2\mathrm{i}$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).
Déduire de la question précédente une construction du point D$'$ image du point D par l' application $f$.

**2.** Soit $R$ un nombre réel strictement positif.
Quelle est l'image par l'application $f$ du cercle de centre A et de rayon $R$?

**3.** **a.** Montrer que, si l'affixe du point $M$ est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point $M'$ est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application $f$ de l'axe imaginaire privé du point A?

**b.** Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathcal{D}$ privée du point A par l'application $f$.

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit $p$ un nombre premier et $a$ un entier naturel premier avec $p$ ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par $p$ ».

**1.** Soit $p$ un nombre premier impair.

**a.** Montrer qu'il existe un entier naturel $k$, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

**b.** Soit $k$ un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit $n$ un entier naturel. Montrer que, si $k$ divise $n$, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

**c.** Soit $b$ tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, $b$ étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant la division euclidienne de $n$ par $b$, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors $b$ divise $n$.

**2.** Soit $q$ un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour $p$ un facteur premier de $A$.

**a.** Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

**b.** Montrer que $p$ est impair.

**c.** Soit $b$ tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, $b$ étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant **1.** que $b$ divise $q$. En déduire que $b = q$.

**d.** Montrer que $q$ divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [p]$.

**3.** Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la lisle des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec $m$ entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que $A_1$ est premier.

**Exercice 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

$B_1$, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
$B_2$, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

**1.** On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de $B_1$. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A : } \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \text{B : } \frac{3}{120}$$

$$\text{C : } \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad \text{D : } \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

**2.** Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de $B_1$ est :

A : 0,98 $\qquad$ B : $\dfrac{0{,}4\times 0{,}95}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}6\times 0{,}02}$ $\qquad$ C : $0{,}6\times 0{,}98$ $\qquad$ D : $\dfrac{0{,}6\times 0{,}98}{0{,}6\times 0{,}98+0{,}4\times 0{,}95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité $p$ de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant $t$ est :

$$p\left([0\ ;\ t[\right) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ $\qquad$ B : $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ $\qquad$ C : $1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ $\qquad$ D : $\mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$

**2.** La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $\mathrm{E} = \lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

**a.** L'intégrale $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $\qquad$ B : $-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$ $\qquad$ C : $\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda$ $\qquad$ D : $t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$

**b.** La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 $\qquad$ B : 2 000 $\qquad$ C : 2 531,24 $\qquad$ D : 3 000

**Exercice 4** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

On désigne par $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par $f'$ sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel $x$, $[f'(x)]^2 - [(f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1.** **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) \neq 0$.

**b.** Calculer $f(0)$.

**2.** En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel $x$, $f''(x) = f(x)$, où $f''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

**3.** On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

**a.** Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

**b.** Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

**c.** En déduire les fonctions $u$ et $v$.

**d.** En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

**4.** **a.** Étudier les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**b.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5.** **a.** Soit $m$ un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à $10^{-2}$ près).

## ANNEXE DE L'EXERCICE 1

**À compléter et à rendre avec la copie**