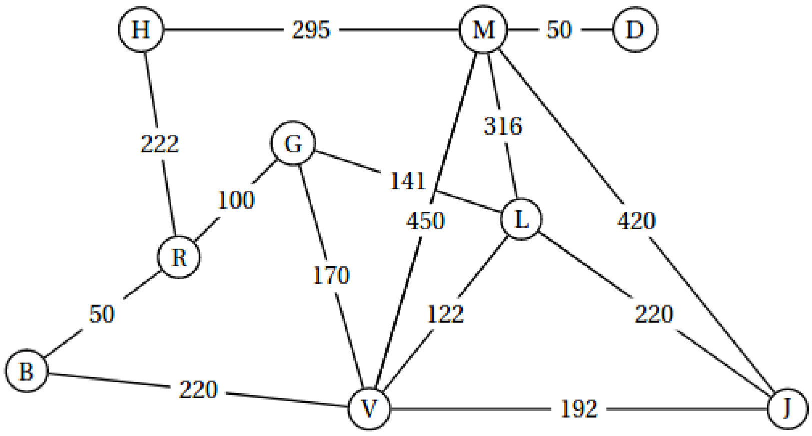
EXERCICE 1 (13 points)

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :

B : Le lagon bleu. H : Rocher Hvitserkur. M : Lac de Mývatn. D : Chute d'eau de Dettifoss. J : Lagune glacière de Jökulsárlón. R : Capitale Reykjavik. G : Geyser de Geysir. L : Massif du Landmannalaugar. V : Ville de Vik.



1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

a) Déterminer l'ordre du graphe.

b) Déterminer si le graphe est connexe.

c) Déterminer si le graphe est complet.

2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4:

a) Il manque certains coefficients de la matrice M.

Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

b) Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

4. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss). Préciser alors le trajet à emprunter.

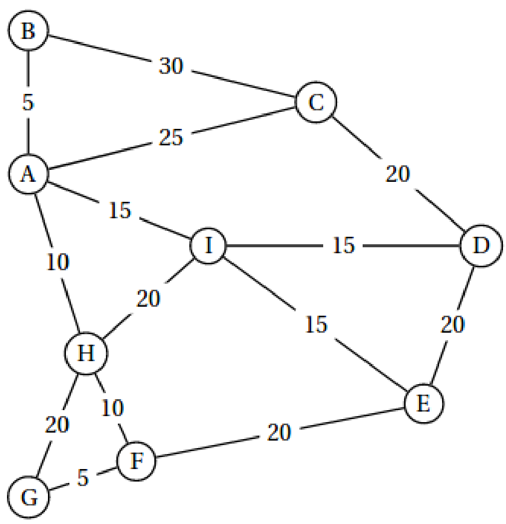
EXERCICE 2 (7 points)

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.

Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées. L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.

Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.