DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 TERMINALE ES spé *Mardi 6 février 2018*

EXERCICE 1 (12 points)

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.

Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisait le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.

Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, ...), le chef du réseau informatique a constaté que 15 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

• a_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre n ;

• b_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre n.

1. a) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. a) On note $P_0 = (a_0 \quad b_0)$ l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer P_0 .

b) On appelle P_1 l'état de la société en juillet 2009. Déterminer P_1 .

c) On appelle P_2 l'état en janvier 2010. Déterminer P_2 (les résultats seront arrondis à 10^{-3}).

3. Dans cette partie on étudie la suite (a_n).

a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}25$.

b) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a_n - 0{,}625$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme u_0 .

c) En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

a) Déterminer x et y.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans dans l'évaluation.*

On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon.

Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?

EXERCICE 2 (8 points)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale. Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits. Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition :

10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre. La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.

3. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.

4. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.

b. En déduire la matrice ligne P_3 . Interpréter ce résultat.

5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

a. Déterminer a et b.

b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier la réponse.