DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 TERMINALE ES spé *Mercredi 4 avril 2018*

EXERCICE 1 (5 points)

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

• Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle vers C est de 0,2.
• Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle vers C est de 0,4.
• Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le pourcentage de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.

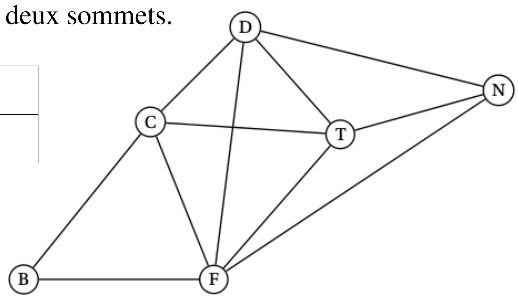
BONUS : Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation. À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

EXERCICE 2 (8 points)

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.

On a représenté par le graphe ci-contre les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

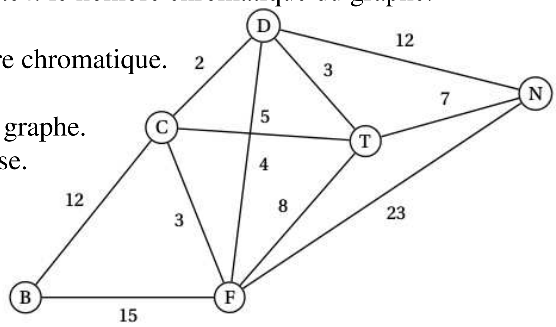
b) Justifier que le graphe est connexe.

2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. Démontrer que leur souhait est réalisable.
3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.

a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$.
b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N.

Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.
Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.



EXERCICE 3 (7 points)

Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux étant valables un an.

Une étude récente montre que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

• 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain ;
• 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain ».
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.
3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.

Quelle sera la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements ? (Résultat arrondi à 0,1 %).

4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.