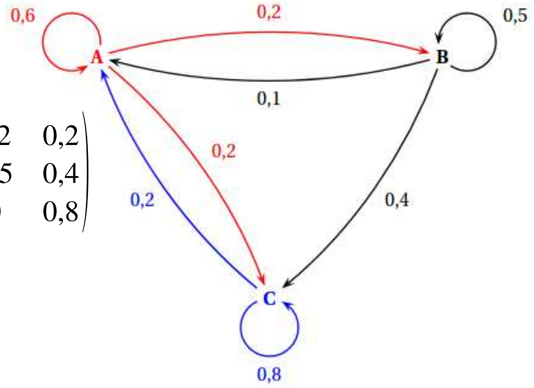
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 TERMINALE ES spé

EXERCICE 1 : 1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : M = $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$
?

3. $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = (0,42 \quad 0,22 \quad 0,36)$.
On peut donc dire que, lors de la deuxième minute,
il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4. $N_0 \times M^{20} = (0,3125 \quad 0,125 \quad 0,5625)$.
On peut conjecturer que l'état stable est $(0,3125 \quad 0,125 \quad 0,5625)$.
Ce que l'on peut vérifier simplement car $(0,3125 \quad 0,125 \quad 0,5625) \times M = (0,3125 \quad 0,125 \quad 0,5625)$.
À long terme, il y aura en moyenne 31,25 internautes connectés sur le site A, 12,5 sur le site B et 56,25 sur le site C.

5. À l'instant $t = 0$, le site C est infecté.
a) La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2; la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est donc égale à 0,2.
b) Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A. C'est impossible d'aller de C vers B.
On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2;
on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
La probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

EXERCICE 2 :
1. a) Le tableau complété :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	2	4	4	5	3	4

b) Il existe une chaîne qui contient tous les sommets par exemple : B – C – D – N – T – F : le graphe est connexe. Il existe une chaîne reliant deux sommets quelconques.

2. Il n'y a que deux sommets de degré impair F et N ; il existe donc une chaîne eulérienne partant de l'un d'entre eux et finissant à l'autre. Il est possible de passer par les six sommets en empruntant chacun des dix chemins une seule fois :
F – B – C – F – D – C – T – F – N – T – D – N .

3. a) Le plus haut degré est 5, donc $n \leq 5 + 1$, soit $n \leq 6$.
Le graphe {C, D, F, T} est complet donc $4 \leq n$.
Donc $4 \leq n \leq 6$.
b) Couleur 1 : F; Couleur 2 : C et N ; Couleur 3 : B et T;
Couleur 4 : D.

4. On utilise l'algorithme de Dijkstra :

B	C	D	F	N	T
0	∞	∞	∞	∞	∞
x	12, B	∞	15, B	∞	∞
x	x	14, C	15, B	∞	17,C
x	x	x	15, B	26, D	17,C
x	x	x	x	26, D	17,C
x	x	x	x	24, T	x

On remonte à partir de N :
le plus court chemin est B –> C –> T - > N qui fait 24 km.

EXERCICE 3 : 1. Le graphe probabiliste de sommets B et T :

2. La matrice de transition de ce graphe est donc M = $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. D'après le texte, on a $(b_0 \quad t_0) = (0,25 \quad 0,75)$. Si l'année 2016 correspond à $n = 0$, l'année 2019 correspond à $n = 3$; il faut donc chercher b_3 et, pour cela, on cherche la matrice $(b_3 \quad t_3) = (0,25 \quad 0,75) \times M = (0,452 \quad 0,548)$.
La part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements sera d'environ 45,2%.

4. L'état stable du graphe probabiliste est représenté par la matrice $(b \quad t)$ telle que $(b \quad t) = (b \quad t) \times M$.

On trouve le système $\begin{cases} b = 0,9b + 0,15t \\ b + t = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 0,1b = 0,15t \\ b + t = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = 1,5t \\ b + t = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = 1,5t \\ 1,5t + t = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} b = 1,5t \\ 2,5t = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = 0,6 \\ t = 0,4 \end{cases}$. Donc le système va se stabiliser vers la situation suivante : 60% de PassBus et 40% de PassTrain.