

Partie A : On considère l'algorithme suivant :

1. L'algorithme pour $p = 2$:

$p = 2$; $u = 5$;

$k = 1$; $u = 0,5 \times 5 + 0,5 \times 0 - 1,5 = 1$;

$k = 2$; $u = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 - 1,5 = -0,5$;

On obtient le nombre $-0,5$ en sortie.

Partie B : Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$.

1. a) L'algorithme modifié pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p :

Variables :

k et p sont des entiers naturels

u est un réel

Entrée :

Demander la valeur de p

Traitement :

Affecter à u la valeur 5

Pour k variant de 1 à p

Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$

Afficher u

Fin de Pour

b) Compléter alors le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5	1	-0,5	-0,75	-0,38	0,31	1,16	2,08	3,04

c) D'après ce tableau, on conjecture que la suite (u_n) est croissante à partir de $n = 3$.

2. a) La propriété (P_n) est : « Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$. »

Initialisation : (P_3) est vraie : en effet $u_4 > u_3$.

Hérédité : On suppose que la propriété (P_n) est vraie pour un entier $n \geq 3$; on démontre que (P_{n+1}) est vraie :

$u_{n+2} = 0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5 = u_{n+1}$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

b) On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir de $n = 3$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.

a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,1n + 0,25 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5 v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n = (0,5)^n$.

b) Pour tout entier naturel n , $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$, soit $0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5$

soit $u_n = 10v_n + n - 5 = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

c) $10 \times 0,5^n$ est le terme d'une suite géométrique de raison 0,5 strictement comprise entre -1 et 1 , donc cette suite tend vers 0 ; donc (u_n) a la même limite que $n + 5$ et donc tend vers $+\infty$.

4. L'algorithme précédent pour déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n > 100$:

On prend différentes valeurs de p pour que la sortie soit > 100 ; on obtient $p = 105$.

On peut aussi utiliser cet algorithme :

Variables :

p est un entier naturel

u et a sont des réels

Entrée :

Demander la valeur de a

Traitement :

Affecter à p la valeur 0

Affecter à u la valeur 5

Tant que $u < a$ faire

Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$

Affecter à p la valeur $p + 1$

Fin de Tant Que

Afficher p