

On étudie l'évolution de deux ruches A et B. Chaque mois, 20 % des abeilles de A passent en B et 20 % des abeilles de B passent en A.

Au bout de  $n$  mois, on note  $u_n$  la population en milliers d'abeilles de la ruche A et  $v_n$  la population en milliers d'abeilles de la ruche B.

Au début de l'expérience, la ruche A compte 60000 abeilles et la ruche B en compte 20000. Ainsi  $u_0 = 60$  et  $v_0 = 20$ .

1. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a 
$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,8u_n + 0,2v_n \\ v_{n+1} = 0,2u_n + 0,8v_n \end{cases}.$$
2. A l'aide de la calculatrice, calculer les 20 premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
3. a) Conjecturer une relation entre  $u_n$  et  $v_n$ .  
b) Démontrer la conjecture.
4. Démontrer que la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = u_n - v_n$  est géométrique.
5. En déduire l'expression de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .
6. Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ? De la suite  $(v_n)$  ?  
Interpréter ce résultat.