CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 2 TERMINALE S

On étudie l'évolution de deux ruches A et B. Chaque mois, 20 % des abeilles de A passent en B et 20 % des abeilles de B passent en A.
Au bout de n mois, on note u_n la population en milliers d'abeilles de la ruche A et v_n la population en milliers d'abeilles de la ruche B.
Au début de l'expérience, la ruche A compte 60000 abeilles et la ruche B en compte 20000. Ainsi $u_0 = 60$ et $v_0 = 20$.

1. Comme 20 % des abeilles de la ruche A passent en B et 20 % des abeilles de la ruche B passent en A, la population de la ruche A diminue de 20 % des abeilles de A et augmente de 20 % des abeilles de B ; donc la population au bout de $n + 1$ mois est égale à la population de la ruche A au mois n fois (1 – 20%), soit 0,8 la population de la ruche A, plus 20 % de la population de la ruche B, soit $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}2v_n$. C'est le même raisonnement pour la ruche B ; donc pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 0{,}2\,v_n \\ v_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 0{,}8\,v_n \end{cases}$.

2. A l'aide du tableur, les 20 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) :

n	u_n	v_n	somme
0	60	20	80
1	52	28	80
2	47,2	32,8	80
3	44,32	35,68	80
4	42,59	37,41	80
5	41,56	38,44	80
6	40,93	39,07	80
7	40,56	39,44	80
8	40,34	39,66	80
9	40,20	39,80	80
10	40,12	39,88	80
11	40,07	39,93	80
12	40,04	39,96	80
13	40,03	39,97	80
14	40,02	39,98	80
15	40,01	39,99	80
16	40,01	39,99	80
17	40,00	40,00	80
18	40,00	40,00	80
19	40,00	40,00	80
20	40,00	40,00	80

3. a) On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 80$.
b) On démontre la conjecture par récurrence :
Initialisation : $u_0 + v_0 = 60 + 20 = 80$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier n et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$:
$u_{n+1} + v_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}2v_n + 0{,}2u_n + 0{,}8v_n = u_n + v_n = 80$.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 80$.

4. La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - v_n$;
ainsi $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}2v_n - (0{,}2u_n + 0{,}8v_n) = 0{,}6u_n - 0{,}6v_n = 0{,}6w_n$.
Donc la suite (w_n) est géométrique e raison 0,6 et de premier terme
$w_0 = u_0 - v_0 = 60 - 20 = 40$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $w_n = 40\times0{,}6^n$.

5. Comme $\begin{cases} u_n + v_n = 80 \\ u_n - v_n = 40\times0{,}6^n \end{cases}$, on en déduit que $2u_n = 80 + 40\times0{,}6^n$, donc
$u_n = 40 + 20\times0{,}6^n$. On trouve aussi $v_n = 40 - 20\times0{,}6^n$.

6. Le terme $0{,}6^n$. Est celui 'une suite géométrique de raison 0,6 strictement compris entre – 1 et 1, donc cette suite converge vers 0, et par somme de limites, u_n converge vers 40. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$ et
pour les mêmes raisons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 40$.
Interprétation de ce résultat : les populations des deux ruches tendent vers le même nombre d'abeilles, soit 40000 abeilles dans chaque ruche.