

On considère le cône ci-contre de rayon de base 6 cm et de hauteur 10 cm.

On place un cylindre dans ce cône comme sur la figure.

On note A le centre du cercle de base, S le sommet du cône, [AD] le rayon du cylindre et [AF] la hauteur du cylindre.

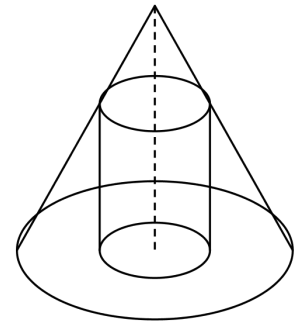
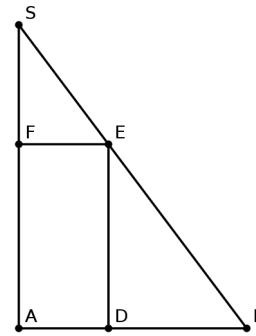
On pose  $x$  le rayon du cercle de base du cylindre, soit  $AD = x$ .

On a alors  $x \in [0 ; 6]$ .

On utilise le théorème de Thalès dans le triangle ABS :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BS} = \frac{DE}{AS}, \text{ soit } \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AS},$$

$$\text{soit } \frac{6-x}{6} = \frac{h}{10}, \text{ donc } h = \frac{10(6-x)}{6} = \frac{5(6-x)}{3}.$$



Le volume du cylindre est égal à  $\pi r^2 h = \pi x^2 \left( \frac{5(6-x)}{3} \right) = \pi \frac{5x^2(6-x)}{3} = \frac{5\pi}{3} \times (6x^2 - x^3)$ .

Cette fonction est un polynôme de degré 3 :  $f(x) = \frac{5\pi}{3} \times (6x^2 - x^3)$

La fonction dérivée est le polynôme du second degré :  $f'(x) = \frac{5\pi}{3} \times (12x - 3x^2) = \frac{5\pi}{3} \times 3x(4-x)$

qui s'annule en  $x = 0$  et  $x = 4$  et est du signe de  $a = -5\pi < 0$  sur  $] -\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty [$  et positif sur  $[0 ; 4]$ .

D'où le tableau de variations sur l'ensemble de définition de la fonction, soit  $[0 ; 6]$  :

| $x$     | 0 | 4                  | 6 |
|---------|---|--------------------|---|
| $f'(x)$ | + | 0                  | - |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{160\pi}{3}$ | 0 |

Le maximum de cette fonction est atteint pour  $x = 4$  et

$$\text{vaut } f(4) = \frac{5\pi}{3} \times (6 \times 4^2 - 4^3) = \frac{160\pi}{3}.$$

Ainsi, le cylindre a un volume maximal égal à  $\frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3$ ,

lorsque son rayon est égal à 4 cm et la hauteur est égale à  $h = \frac{5(6-4)}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm}$ .