Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par : $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i}$.
On note M_n l'image de z_n.

1. $z_1 = \lambda z_0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $z_2 = \lambda z_1 + \mathrm{i} = \lambda \mathrm{i} + \mathrm{i} = \mathrm{i}(\lambda + 1)$, $z_3 = \lambda z_2 + \mathrm{i} = \lambda \mathrm{i}(\lambda + 1) + \mathrm{i} = \mathrm{i}(\lambda^2 + \lambda + 1)$.

2. On démontre que pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$ par un raisonnement par récurrence :

Initialisation : $z_0 = 0$ et $\dfrac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = \dfrac{1-1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier n et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$:
$z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} = \lambda \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} + \mathrm{i} = \mathrm{i}(\lambda \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} + 1) = \mathrm{i}\dfrac{\lambda(\lambda^n - 1) + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \mathrm{i}\dfrac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1} = \mathrm{i}\dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$. Donc la propriété est héréditaire.

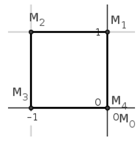
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

3. Étude du cas λ = i.

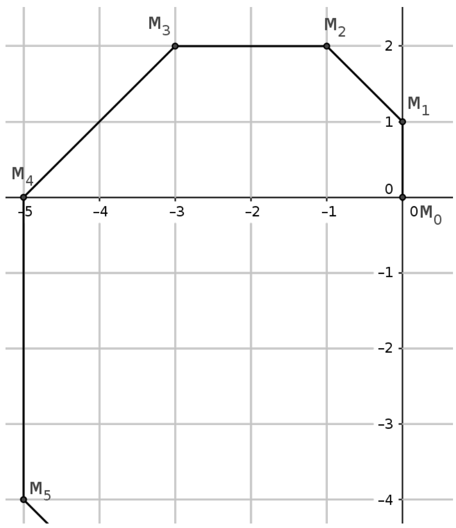
a) $z_4 = \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = \dfrac{i^4 - 1}{i - 1}\mathrm{i} = \dfrac{1 - 1}{i - 1}\mathrm{i} = 0$.

b) Pour tout entier naturel n, $z_{n+4} = \dfrac{i^{n+4} - 1}{i - 1}\mathrm{i} = \dfrac{i^n \times i^4 - 1}{i - 1}\mathrm{i} = \dfrac{i^n - 1}{i - 1}\mathrm{i} = z_n$.

c) Représentation des points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$:

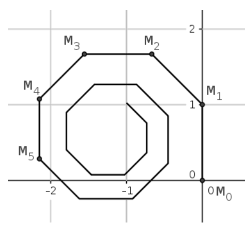


4. Étude du cas λ = 1 + i.
$z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = \dfrac{(1+i)^2 - 1}{1 + i - 1}\mathrm{i} = \dfrac{2i - 1}{i}\mathrm{i} = -1 + 2\mathrm{i}$,
$z_3 = \lambda z_2 + \mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(-1 + 2\mathrm{i}) + \mathrm{i} = -3 + 2\mathrm{i}$,
$z_4 = \lambda z_3 + \mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(-3 + 2\mathrm{i}) + \mathrm{i} = -5$,
$z_5 = \lambda z_4 + \mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(-5) + \mathrm{i} = -5 - 4\mathrm{i}$.
Représentation des points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$:



5. Étude du cas $\lambda = \dfrac{2}{3}(1 + \mathrm{i})$.

a) Représentation des points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$:



b) L'algorithme :

Langage naturel	Python

n → 0
z → 0
Pour i allant de 1 à 20 faire :
z = (2/3)*(1+i)*z+i
n = n + 1
Afficher(n, z)
FinPour
	from math import *
	n = 0
	z = complex(0,0)
	for k in range(1,20):
	        z = (2.0/3)*(1+1j)*z+1j
	        n = n+1
	        print(n,z)

On trouve $n = 18$ tel que z_n est très proche de $-1 + \mathrm{i}$.

c) On admet que la suite (z_n) converge dans ce cas. Alors la limite de z_n est la même que la limite de z_{n+1} ; donc la limite l vérifie $l = \lambda l + \mathrm{i}$, soit $l = \dfrac{\mathrm{i}}{1 - \lambda} = \dfrac{\mathrm{i}}{1 - \frac{2}{3}(1+i)} = \dfrac{3\mathrm{i}}{3 - 2(1+i)} = \dfrac{3\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \dfrac{-6 + 3\mathrm{i}}{5}$.