EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

1. La fonction f est définie si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$; donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Pour tout réel $x \neq 1$, $x + 2 + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1)+4}{x-1} = \dfrac{x^2-x+2x-2+4}{x-1} = \dfrac{x^2+x+2}{x-1} = f(x)$.

Donc f peut s'écrire $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée ; on utilise alors l'écriture de la question 2 :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1} = 0$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-1} = 0$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{4}{x-1} = +\infty$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x+2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{4}{x-1} = -\infty$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$.

4. On obtient une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. La fonction dérivée de f est $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ qui s'annule en $x = 3$ et $x = -1$;

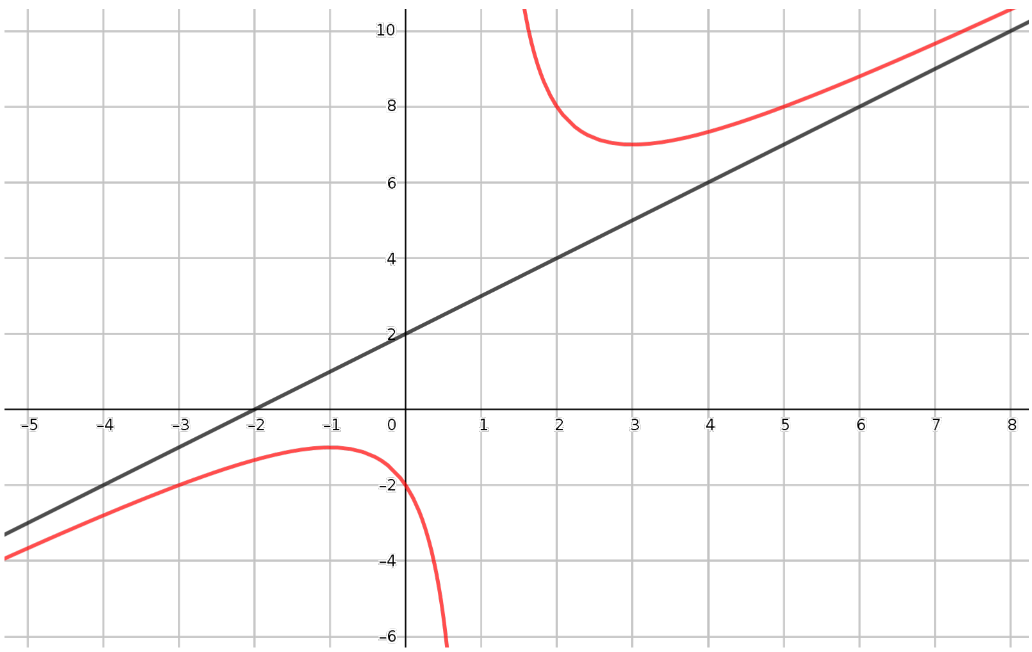
$f'(x)$ est du signe du numérateur, puisque son dénominateur est un carré (> 0) ;
$f'(x)$ est du signe de $a = 1 > 0$ sur $]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ et négatif sur $[-1 ; 3]$.

6. Le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$
					‖ 0				

7. On a $f(x) - (x + 2) = \dfrac{4}{x-1}$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1} = 0$. Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C représentative de f se rapproche de la droite (d) d'équation $y = x - 2$; on dit que (d) est asymptote oblique à C.



EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

1. La fonction f est définie si $x^2 - 2x - 3 > 0$; le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 16 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = 3$.

Et $x^2 - 2x - 3 > 0$ sur $]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$. Donc $D_f =]-\infty\,;-1[\cup]3\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée ; on factorise le numérateur et le dénominateur :

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x(2+\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}}\ ;\ \text{si } x>0,\ f(x) = \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\ \text{ et si } x<0,\ f(x) = \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\ .$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{3}{x}) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 1$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{3}{x}) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = -1$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(2x+3) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{x^2-x-3} = 0^+$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(2x+3) = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\sqrt{x^2-x-3} = 0^+$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

3. On obtient alors quatre asymptotes à la courbe représentative de f :
Deux asymptotes horizontales d'équation $y = 2$ et $y = -2$; et deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

4. $$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-2x-3}-(2x+3)\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}}{x^2-2x-3} = \frac{2\sqrt{x^2-2x-3}-(2x+3)\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}}{x^2-2x-3} =$$

$$\frac{\dfrac{2(x^2-2x-3)-(2x+3)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-3}}}{x^2-2x-3} = \frac{2x^2-4x-6-(2x^2-2x+3x-3)}{\sqrt{x^2-2x-3}(x^2-2x-3)} = \frac{-5x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}(x^2-2x-3)}$$ qui s'annule

en $x = \dfrac{-3}{5} = -0{,}6$; $f'(x)$ est du signe du numérateur (fonction affine avec $a = -5 < 0$), puisque son dénominateur est > 0 sur l'ensemble de définition de f ;
et $-5x-3$ est négatif sur $[3\,;+\infty[$
et positif sur $]-\infty\,;-1]$.

5. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	2