

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

EXERCICE 2 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$. On note $f', f'' = f^{(2)}, f^{(3)}$ les dérivées successives de f .

1. Calculer pour tout réel x , f' et f'' .

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

b) Déduisez-en que a_n et b_n sont des entiers relatifs.

3. On se propose dans cette question d'exprimer a_n et b_n en fonction de n .

a) Vérifier que la suite a_n est une suite arithmétique. Déduisez-en a_n en fonction de n pour tout n supérieur ou égal à 1.

b) Vérifier que pour tout n supérieur ou égal à 1 : $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$.

Déduisez-en b_n en fonction de n pour tout n supérieur ou égal à 1.