CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 6 TERMINALE S

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie et dérivable sur IR par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble IR par $g(x) = 1 - x + e^x$.

La fonction g est dérivable sur IR et $g'(x) = -1 + e^x = e^x - 1$. La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$, donc $g'(x)$ est positive sur $[0\ ;+\infty\ [$ et négative sur $]-\infty\ ;0]$.

D'où le tableau de variations de la fonction g sur IR :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

On en déduit le signe de $g(x)$: La fonction admet un minimum $= 2 > 0$, donc $g(x) > 0$ sur IR.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$;

par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$; par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur IR. La fonction f est dérivable sur IR et pour tout réel x,

$f'(x) = 1 + \frac{1\times e^x - x\times e^x}{e^{2x}} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x+1-x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} = e^{-x}g(x)$. Produit de deux fonctions strictement positives sur IR.

4. D'où le tableau de variation de la fonction f sur IR :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

5. La fonction f est continue et strictement croissante de IR dans IR ; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur IR .

On a $f(-1) = -1 + 1 + \frac{-1}{e^{-1}} = -e < 0$ et $f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1 > 0$, donc $-1 < \alpha < 0$.

6. a. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1$.

b. Pour étudier la position relative de la courbe C et de la droite T, on étudie le signe de

$f(x) - (2x + 1) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) = -x + \frac{x}{e^x} = \frac{-xe^x + x}{e^x} = \frac{x(1-e^x)}{e^x}$.

On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	
$f(x) - (2x + 1)$		$-$	0	$-$	

Donc, pour tout réel x, $f(x) - (2x + 1) \leq 0$, et la tangente T est au-dessus de la courbe C.

EXERCICE 2 : La fonction f est définie sur IR par $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$.

On note $f', f'' = f^{(2)}, f^{(3)}$ les dérivées successives de f.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x = (x^2 + x)e^x$.

et $f''(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x)e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$.

2. a) On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$:

Initialisation : $f'(x) = (x^2 + x)e^x$, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x$ et on montre qu'elle est vraie pour $n + 1$: $f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + (x^2 + a_nx + b_n)e^x = (x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n)e^x = (x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})e^x$, donc $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$:

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

b) Comme $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ sont des entiers relatifs, la somme d'entiers relatifs sont encore des entiers relatifs, donc a_n et b_n sont des entiers relatifs.

3. On se propose dans cette question d'exprimer a_n et b_n en fonction de n .

a) Comme $a_{n+1} = a_n + 2$, la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 1$.

Donc pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

b) Pour tout $n \geq 1$: $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2} = \ldots = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$.

Donc b_n est la somme des $n - 1$ premiers termes consécutifs de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1,

d'où $b_n = \frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2} = \frac{(n-1)(1+2(n-1)-1)}{2} = \frac{2(n-1)^2}{2} = (n - 1)^2$.