CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 7 TERMINALE S

EXERCICE 1 : 1. a) La fonction f est définie et dérivable sur]0 ; +∞ [et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ qui est du signe du numérateur puisque le dénominateur est strictement positif, et $x - 1 > 0$ pour $x > 1$. Donc la fonction f est décroissante sur]0 ; 1] et croissante sur [1 ; +∞ [.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1+\frac{1}{x}\right) = -1$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = \frac{x\ln(x) - x + 1}{x}$; d'où $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$; et $\lim\limits_{x \to 0} (-x+1) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$;

c) La fonction f admet un minimum égal à $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$; donc pour tout x de]0 ; +∞ [, $f(x) \geq 0$.

2. a) La fonction g est définie et dérivable sur]0 ; +∞ [et $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ qui est du signe du numérateur puisque le dénominateur est strictement positif, et $1 - x > 0$ pour $x < 1$. Donc la fonction g est croissante sur]0 ; 1] et décroissante sur [1 ; +∞ [.

b) $g(x) = \ln(x) + 1 - x = x\left(\frac{\ln(x)+1}{x} - 1\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)+1}{x} - 1\right) = -1$;

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$; et $\lim\limits_{x \to 0} (1-x) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

c) La fonction g admet un maximum égal à $g(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$; donc pour tout x de]0 ; +∞ [, $g(x) \leq 0$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geq 0$, donc $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$; et $g(x) \leq 0$, donc $\ln(x) \leq x - 1$; d'où, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$.

4. a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. En posant, $x = e^{\frac{1}{n}}$, $1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \leq \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$ équivaut à

$1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$; d'où $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}$ et $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$; on élève chaque membre à la puissance n :

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e}$; on passe à l'inverse : $e < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$ et $e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

b) L'encadrement de e obtenu avec $n = 2$: $\frac{9}{4} < e < 4$.

5. a) On considère l'algorithme ci-contre où la variable p est un entier naturel.
L'algorithme complété afin que les variables a et b donnent un encadrement de e d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} :

```
k ← 2
a ← 9/4
b ← 4
Tant que b – a > 10^(-p)
   k ← k + 1
   a ← (1 + 1/k)^k
   b ← 1/(1 – 1/k)^k
Fin Tant que
```

b) L'algorithme avec $p = 3$ donne $a = 2{,}71778$ et $b = 2{,}71878$.
On constate une lenteur...

EXERCICE 2 : L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle]0; 1[par :
$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$ où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. La fonction f est définie et dérivable sur]0 ; 1[, de la forme $k\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{20x}{1-x}$; $u'(x) = \frac{20}{(1-x)^2}$;

d'où $f'(x) = 30 \frac{\frac{20}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}} = \frac{30}{x(1-x)}$ qui est strictement positif sur]0 ; 1[. Donc la fonction f est croissante sur]0 ; 1[.

2. Pour déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans, on résout la double inéquation : $20 \leq f(x) \leq 120$

On a vu que la fonction $x \rightarrow f(x)$ est strictement croissante ; on résout l'équation $f(x) = 20$:

$30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 20$ équivaut à $\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{2}{3}$ équivaut à $\frac{20x}{1-x} = e^{\frac{2}{3}}$ équivaut à $20x = e^{\frac{2}{3}}(1-x)$

équivaut à $(20 + e^{\frac{2}{3}})x = e^{\frac{2}{3}}$ équivaut à $x = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}} \simeq 0{,}09$.

on résout l'équation $f(x) = 120$:

$30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 120$ équivaut à $\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 4$ équivaut à $\frac{20x}{1-x} = e^4$ équivaut à $20x = e^4(1-x)$

équivaut à $(20 + e^4)x = e^4$ équivaut à $x = \frac{e^4}{20+e^4} \simeq 0{,}73$. Donc $20 \leq f(x) \leq 120$ équivaut à $0{,}09 \leq x \leq 0{,}73$.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	9	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,167

1. a. Le nombre 0,245 dans la cellule D3 correspond à la moyenne annuelle de croissance en mètres entre les âges de 70 et 80 ans : $\frac{18{,}05-15{,}6}{10} = \frac{2{,}45}{10} = 0{,}245$.

b. La formule à entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite :
« = (C2 − B2)÷(C1 − B1) »

2. Il faut d'abord déterminer l'âge de l'épicéa : $f(0{,}27) = 30\ln\left(\frac{5{,}4}{0{,}73}\right) \simeq 60$.

Un épicéa de 60 ans devrait mesurer $11{,}2 + 0{,}22\times 10 = 13{,}40$ m, si on considère qu'entre 50 et 70 ans la croissance annuelle moyenne est de 0,22 m.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a. On trouve en E3, F3 et G3 0,25 , puis 0,24 en H3, les valeurs suivantes étant elles aussi inférieures à 0,25 qui est la plus grande valeur. Donc la vitesse de croissance moyenne annuelle est maximale entre 80 ans et 95 ans. Ceci nous donne donc l'intervalle d'âges sur lequel la qualité du bois est la meilleure.

b. L'âge d'un épicéa de diamètre 70 cm est $f(0{,}7) = 30\ln\left(\frac{14}{0{,}3}\right) \simeq 115$ ans.

Il n'est donc pas cohérent de demander aux bûcherons de couper des épicéas de diamètre 70 cm puisque la qualité du bois n'est plus la meilleur.