CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 8 TERMINALE S

EXERCICE 1 : On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$.

1. a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. D'où $z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = \frac{1}{2}$, $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = -1$, $z_3 = 1 - \frac{1}{z_2} = 2$,

$z_4 = 1 - \frac{1}{z_3} = \frac{1}{2}$, $z_5 = 1 - \frac{1}{z_4} = -1$, $z_6 = 1 - \frac{1}{z_5} = 2$. On remarque que $z_4 = z_1$, $z_5 = z_2$, $z_6 = z_3 = z_0$.

b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$.

$z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = 1 - \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, $z_3 = 1 - \frac{1}{z_2} = 1 - \frac{2}{1+\mathrm{i}} = 1 - (1 - \mathrm{i}) = \mathrm{i} = z_0$;

ainsi $z_4 = 1 - \frac{1}{z_3} = 1 - \frac{1}{z_0} = 1 + \mathrm{i} = z_1$; $z_5 = 1 - \frac{1}{z_4} = 1 - \frac{1}{z_1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = z_3$; $z_6 = 1 - \frac{1}{z_5} = 1 - \frac{1}{z_2} = \mathrm{i}$.

c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. On conjecture que tout entier naturel n, $z_{3n} = z_0$. Démonstration par récurrence : propriété (P_n) : $z_{3n} = z_0$;

Initialisation : pour $n = 0$, $z_{3\times 0} = z_0$; vrai.

Hérédité : On suppose (P_n) vraie pour un entier naturel n ; montrons que (P_{n+1}) est vraie :

$$z_{3(n+1)} = z_{3n+3} = 1 - \frac{1}{z_{3n+2}} = 1 - \frac{1}{z_{3n+2}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_{3n+1}}} = 1 - \frac{1}{\frac{z_{3n+1} - 1}{z_{3n+1}}} = 1 - \frac{z_{3n+1}}{z_{3n+1} - 1} = \frac{z_{3n+1} - 1 - z_{3n+1}}{z_{3n+1} - 1} = \frac{-1}{z_{3n+1} - 1}$$

$$= \frac{-1}{1 - \frac{1}{z_{3n}} - 1} = \frac{-1}{\frac{-1}{z_{3n}}} = z_{3n} = z_0.$$ Donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $z_{3n} = z_0$.

2. 2018 = 3672 + 2 ; ainsi $z_{2016} = z_{3\times 672} = z_0$. Et $z_{2017} = z_1$, $z_{2018} = z_2$. Et $z_1 = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$;

$z_2 = 1 - \frac{1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}} = 1 - \frac{2}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{2\,\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$. Donc $z_{2018} = \mathrm{i}$.

3. $z_0 = z_1$ équivaut à $z_0 = 1 - \frac{1}{z_0}$ équivaut à $(z_0)^2 = z_0 - 1$ équivaut à $(z_0)^2 - z_0 + 1 = 0$.

le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes :

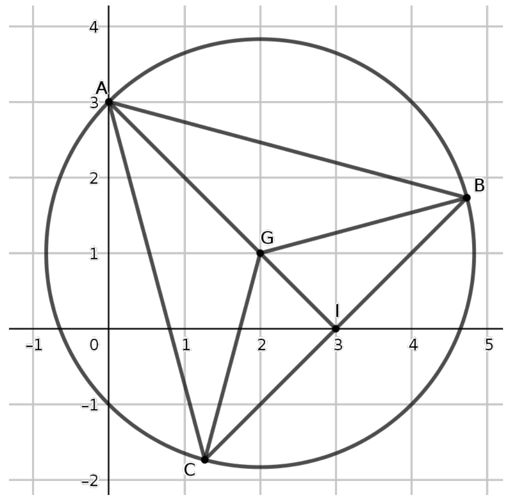
$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}$ et $x_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces deux cas, la suite (z_n) est constante.

EXERCICE 2 : On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère les points A et G d'affixes respectives 3i et 2 + i.

On veut déterminer les affixes des points B et C tels que ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et de centre de gravité G.



1. a) ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G, qui est aussi le centre du cercle circonscrit ;

donc l'angle ($\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GA}$) est égal à $\frac{2\pi}{3}$

et les longueurs GA = GB ; donc arg($\frac{z_A - z_G}{z_B - z_G}$) = $\frac{2\pi}{3}$ et

GA = $|z_A - z_G|$ = GB = $|z_B - z_G|$, ainsi $\left|\frac{z_A - z_G}{z_B - z_G}\right| = 1$;

Donc le nombre complexe $\frac{z_A - z_G}{z_B - z_G} = e^{\mathrm{i}2\frac{\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{z_A - z_G}{z_B - z_G} = e^{i2\frac{\pi}{3}}$ équivaut à $\dfrac{3i - (2+i)}{z_B - (2+i)} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $2i - 2 = (z_B - (2+i))\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

équivaut à $4i - 4 = (z_B - (2+i))(-1+i\sqrt{3})$ équivaut à $4i - 4 = (-1+i\sqrt{3})z_B - (2+i)(-1+i\sqrt{3})$

équivaut à $4i - 4 = (-1+i\sqrt{3})z_B + 2 - 2i\sqrt{3} + i + \sqrt{3}$ équivaut à $(-1+i\sqrt{3})z_B = -6 - \sqrt{3} + 3i + 2i\sqrt{3}$

équivaut à $z_B = \dfrac{-6-\sqrt{3}+3i+2i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(-6-\sqrt{3}+3i+2i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{12+4\sqrt{3}+4i\sqrt{3}}{4} = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

2. De même, le nombre complexe $\dfrac{z_A - z_G}{z_C - z_G} = e^{i-2\frac{\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{z_A - z_G}{z_C - z_G} = e^{i-2\frac{\pi}{3}}$ équivaut à $\dfrac{3i - (2+i)}{z_C - (2+i)} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $2i - 2 = (z_C - (2+i))\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

équivaut à $4i - 4 = (z_C - (2+i))(-1-i\sqrt{3})$ équivaut à $4i - 4 = (-1-i\sqrt{3})z_C - (2+i)(-1-i\sqrt{3})$

équivaut à $4i - 4 = (-1-i\sqrt{3})z_C + 2 + 2i\sqrt{3} + i - \sqrt{3}$ équivaut à $(-1-i\sqrt{3})z_C = -6 + \sqrt{3} + 3i - 2i\sqrt{3}$

équivaut à $z_C = \dfrac{-6+\sqrt{3}+3i-2i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{(-6+\sqrt{3}+3i-2i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{12-4\sqrt{3}-4i\sqrt{3}}{4} = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

3. L'affixe du milieu I de [BC] est $\dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2} = 3$.

4. Construction des points A, I et G dans le plan. Méthode de construction des points B et C :
On trace le cercle de centre G passant par A (cercle circonscrit au triangle ABC) et la perpendiculaire à (AG) passant par I (hauteur du triangle ABC issue de A). Les points d'intersection du cercle et de la droite sont les points B et C.