EXERCICE 1 (4 points)

Calculer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = n^2 - 4n - 5.$

b) $u_n = \frac{n + \cos(n)}{n^2 + 1}.$

c) $u_n = \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}}.$

d) $u_n = \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{0,8^n + 2}.$

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}.$

1. Calculer les valeurs exactes de $u_1, u_2.$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1, 1 \leq u_n \leq 3.$
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse. (On ne demande pas de calculer la limite).

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2 - u_n}.$

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, $u_1, u_2, u_3.$
2. Conjecturer l'écriture de u_n en fonction de $n.$
3. Démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n).$

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2.$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2 et $u_3.$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n \geq 2n.$
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel $n, v_n = u_n - 2n.$
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de $n.$
4. a) Exprimer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ en fonction de $n.$
 - b) En déduire la limite de $(S_n).$