EXERCICE 1 : Calcul des limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = n^2 - 4n - 5$; on factorise par n^2 : $u_n = n^2\left(1 - \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, donc, par somme de limites, $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par produit de limites.

b) $u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2+1}$; pour tout entier naturel n, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+\cos(n)}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$.

On a $\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$; $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et par quotient et produit de limites $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$; de même $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$; et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) $u_n = \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+4}$; on factorise par $\sqrt{n}$: $u_n = \frac{\sqrt{n}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{4}{\sqrt{n}}}$; $\lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{4}{\sqrt{n}}\right) = 1$; par quotient de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

d) $u_n = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{0{,}8^n+2}$; On utilise les limites de suites géométriques : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car la raison est strictement comprise entre -1 et 1 ; de même, $\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$; donc par somme et quotient de limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Calcul des valeurs exactes de u_1, u_2 : $u_1 = \sqrt{2u_0-1} = \sqrt{2\times5-1} = 3$; et $u_2 = \sqrt{2u_1-1} = \sqrt{2\times3-1} = \sqrt{5}$.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$:

Initialisation : $u_1 = 3$ et $1 \leqslant u_1 \leqslant 3$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$, et on montre que P_{n+1} est vraie :

$1 \leqslant u_n \leqslant 3$ implique $2 \leqslant 2u_n \leqslant 6$ implique $1 \leqslant 2u_n - 1 \leqslant 5$; on prend la racine carrée de chaque membre positif (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), donc $1 \leqslant \sqrt{2u_n-1} \leqslant \sqrt{5} < 3$, donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3. On démontre par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante :

Initialisation : $u_1 = 3$ et $u_0 = 5$, donc $u_1 \leqslant u_0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n, et on montre que P_{n+1} est vraie :

$u_n \geqslant u_{n+1}$ implique $2u_n \geqslant 2u_{n+1}$ implique $2u_n - 1 \geqslant 2u_{n+1} - 1$ implique $\sqrt{2u_n-1} \geqslant \sqrt{2u_{n+1}-1}$, donc $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et la suite est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.

EXERCICE 3 : 1. En remplaçant n par 0, on obtient $u_1 = \frac{u_0+\frac{1}{0+1}}{2-u_0} = \frac{1}{2}$;

en remplaçant n par 1, on obtient $u_2 = \frac{u_1+\frac{1}{1+1}}{2-u_1} = \frac{2}{3}$; puis $u_3 = \frac{3}{4}$, $u_4 = \frac{4}{5}$.

2. On conjecture que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

3. On démontre cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence:

Initialisation : $u_0 = 0 = \frac{0}{1}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2-u_n} = \frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1}}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{n+1}}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \text{ . CQFD.}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

4. $u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1$, et par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

<u>EXERCICE 4</u> : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. Calcul des valeurs exactes de u_1 , u_2 et u_3 :

$u_1 = 3u_0 - 4\times0 + 2 = 5$; $u_2 = 3u_1 - 4\times1 + 2 = 13$; $u_3 = 3u_2 - 4\times2 + 2 = 33$.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2n$:

Initialisation : $u_0 = 1$ et $2\times0 = 0$, donc $u_0 \geqslant 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n, et on montre que P_{n+1} est vraie :

$u_n \geqslant 2n$ implique $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2 \geqslant 3\times2n - 4n + 2 = 2n + 2 = 2(n+1)$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2n$.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 2n$.

a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) = 3u_n - 4n + 2 - 2n - 2 = 3u_n - 6n = 3(u_n - 2n) = 3v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2\times0 = 1$.

b) Ainsi, $v_n = 1\times3^n = 3^n$. Et $u_n = v_n + 2n = 3^n + 2n$.

4. a) La somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + \sum_{k=0}^{k=n} 2k = 1\,\frac{1-3^n}{1-3} + 2\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1-3^n}{-2} + n(n+1) = \frac{3^n-1}{2} + n(n+1)$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1) = +\infty$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.