EXERCICE 1 (2 points)

Calculer la limite des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2n+0{,}5^n}{0{,}5n+1}$.

b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 2 (5 points)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament.

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament à un patient par voie intraveineuse. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 µg.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.

On suppose $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.

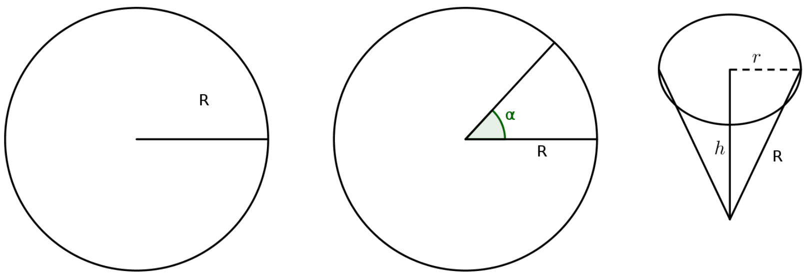
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40\times 0{,}5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L^{-1}.

Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 3 (6 points)

Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution.

On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.



On appelle r le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire A et de hauteur h est $\dfrac{A\times h}{3}$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit R = 20 cm.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h)=\dfrac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton?

EXERCICE 4 (7 points)

1. Démonstrations de cours :

a) Montrer que pour tout nombre complexe z, dont le conjugué est noté $\bar{z}$, et la partie réelle Re(z), que $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

b) Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe non nul. Écrire la partie réelle de $\dfrac{z}{\bar{z}}$ en fonction de a et b.

2. On considère les nombres complexes $z_3 = \dfrac{3-i}{1+i}$ et $z_4 = \dfrac{5i}{2+i}$.

Écrire les deux nombres complexes sous la forme algébrique.

3. Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des nombres complexes : $z^2 - 4z + 5 = 0$.
4. Placer les images de z_3 et z_4 et les solutions de l'équation précédente dans le plan rapporté à un repère orthonormé.