CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 TERMINALE S 707

EXERCICE 1 : Calcul des limites des suites (u_n) suivantes :

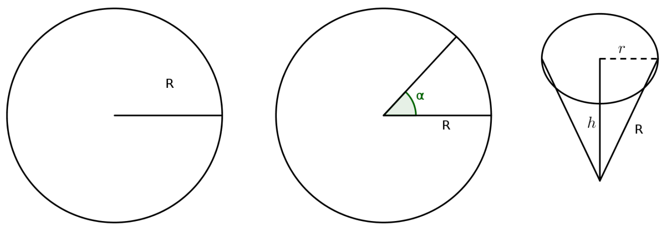
a) $u_n = \dfrac{2n+0{,}5^n}{0{,}5n+1} = \dfrac{n(2+\frac{0{,}5^n}{n})}{n(0{,}5+\frac{1}{n})} = \dfrac{2+\frac{0{,}5^n}{n}}{0{,}5+\frac{1}{n}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison 0,5 strictement comprise entre – 1 et 1) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc, par somme de limites,

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\dfrac{0{,}5^n}{n}) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5+\dfrac{1}{n}) = 0{,}5$; par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{0{,}5} = 4$.

b) $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$: somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 1 ; donc $u_n = \dfrac{1-0{,}5^{n+1}}{1-0{,}5} = 2(1-0{,}5^{n+1})$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 2 : La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament. On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament à un patient par voie intraveineuse. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 µg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
On suppose $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.
1. On démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40\times0{,}5^n$.
Initialisation : $u_1 = 20$ et $40 - 40\times0{,}5^1 = 40 - 20 = 20$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$, et on démontre que la propriété est vraie pour $n + 1$:
$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20 = 0{,}5(40 - 40\times0{,}5^n) + 20 = 20 - 40\times0{,}5^{n+1} + 20 = 40 - 40\times0{,}5^{n+1}$.
Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40\times0{,}5^n$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison 0,5 strictement comprise entre – 1 et 1) ;
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L^{-1}.
Le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre est 5 car
$u_4 = 40 - 40\times0{,}5^4 = 37{,}5$ et $u_5 = 40 - 40\times0{,}5^5 = 38{,}75$.

EXERCICE 3 : Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution.
On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.
On appelle r le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.



1. On choisit R = 20 cm.
a) Dans le cône, le triangle de côté R, r et h est rectangle, donc $r^2 + h^2 = R^2$, donc $r^2 = R^2 - h^2 = 400 - h^2$.
Le volume du cône est égal à $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(400 - h^2)h = \dfrac{1}{3}\pi(400h - h^3)$.

b) La fonction V est dérivable sur ℝ, et $V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(400 - 3h^2)$ polynôme du second degré qui s'annule lorsque $h^2 = \dfrac{400}{3}$, soit $h = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ ou $h = \dfrac{-20}{\sqrt{3}}$. Le signe de V'(h) :

h	$-\infty$		$\frac{-20}{\sqrt{3}}$		$\frac{20}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$V'(h)$		–	0	+	0	–	

La hauteur h est comprise entre 0 et 20 cm.

D'où le tableau de variations :

h	0		$\frac{20}{\sqrt{3}}$		20
V '(h)		+	0	–	
V (h)	0	$\nearrow$	$\frac{16000\,\pi}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Ainsi la valeur de $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$ rend le volume du cône maximum

et ce volume est $V(\frac{20}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}\pi(400\frac{20}{\sqrt{3}} - \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^3) =$

$\frac{1}{3}\pi(\frac{8000}{\sqrt{3}} - \frac{8000}{3\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}\pi\frac{16000}{3\sqrt{3}} = \frac{16000\,\pi}{9\sqrt{3}} \simeq 3224{,}5$ cm^3

c) On a $2\pi r = \mathrm{R}(2\pi - \alpha)$ (périmètre du disque de base du cône),

donc $\alpha = \frac{2\pi(\mathrm{R}-r)}{\mathrm{R}} = \frac{\pi(20-r)}{10} = \frac{\pi(20-\sqrt{400-h^2})}{10}$.

Pour avoir un volume maximum, $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$, il faut donc découper le disque en carton avec un angle

$\alpha = \frac{\pi(20-\sqrt{400-\frac{400}{3}})}{10} = \frac{20\pi-20\pi\sqrt{\frac{2}{3}}}{10} = 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1{,}15$ radians, soit $\simeq 66°$.

2. L'angle α ne dépend pas du rayon R du disque en carton : $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\mathrm{R}^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(\mathrm{R}^2 h - h^3)$.

La fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $V'(h) = \frac{1}{3}\pi(\mathrm{R}^2 - 3h^2)$ qui s'annule lorsque $h^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{3}$,

soit $h = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$ ou $h = \frac{-\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$. $\alpha = \frac{2\pi(\mathrm{R}-r)}{\mathrm{R}} = \frac{\pi(20-\sqrt{\mathrm{R}^2-h^2})}{10}$.

Pour avoir un volume maximum, $h = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$, il faut donc découper le disque en carton avec un angle

$\alpha = \frac{2\pi(\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{\mathrm{R}^2}{3}})}{\mathrm{R}} = \frac{2\pi(\mathrm{R}-\mathrm{R}\sqrt{\frac{2}{3}})}{\mathrm{R}} = 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1{,}15$ radians, soit $\simeq 66°$ qui est la même valeur que précédemment.

<u>EXERCICE 4 :</u> 1. Démonstrations de cours :

a) On pose $z = a + \mathrm{i}b$; donc $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$; donc $z + \bar{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.

b) Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe non nul.

$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)}{(a-\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)} = \frac{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{2ab}{a^2+b^2}$; la partie réelle de $\frac{z}{\bar{z}}$ est $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

2. On considère les nombres complexes $z_3 = \frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ et $z_4 = \frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

$z_3 = \frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3-3\mathrm{i}-\mathrm{i}-1}{2} = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_4 = \frac{5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{5\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{10\mathrm{i}+5}{5} = 1 + 2\mathrm{i}$.

3. Résolution de l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times5 = -4 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes :

$z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+2\mathrm{i}}{2} = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$.

Donc S = {2 + i ; 2 – i}.

4. Les images de z_3 et z_4 et les solutions de l'équation précédente dans le plan rapporté à un repère orthonormé :