

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

1. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur est strictement positif.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0.$$

3. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

4. Pour étudier les variations de cette fonction, on trouve le signe de sa fonction dérivée : f est de la forme $\frac{u}{v}$,

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} \text{ qui est du signe du numérateur puisque le}$$

dénominateur est un carré. Le numérateur s'annule en $x = 1$ et $x = -1$ et est du signe de $a = -4 < 0$ sur

$]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ est positif sur $[-1; 1]$.

5. Le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$	-1			1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	-2			2	0

EXERCICE 2 : Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de 300 cm^2 ;

Les marges doivent faire $1,5 \text{ cm}$ sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux (voir figure ci-contre).

Problème : Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

1. L'aire d'une page est égale à xy ; on a $(x-4)(y-3) = 300 \text{ cm}^2$, d'où

$$y-3 = \frac{300}{x-4}, \text{ d'où } y = \frac{300}{x-4} + 3, \text{ et l'aire de la page est } f(x) = \frac{300x}{x-4} + 3x.$$

2. La hauteur x de la page doit être supérieure à 4 cm (les deux marges verticales),

d'où l'ensemble de définition de f est $]4; +\infty[$.

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{300x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{300x}{x} = 300 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty, \text{ donc par somme de limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{300x}{x-4} = \frac{1200}{0^+} = +\infty, \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} 3x = 1200, \text{ donc par somme de limites } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty.$$

4. La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$.

$$5. f'(x) = \frac{300(x-4) - 300x \times 1}{(x-4)^2} + 3 = \frac{-1200}{(x-4)^2} + 3 = \frac{-1200 + 3(x-4)^2}{(x-4)^2} = \frac{3[(x-4)^2 - 400]}{(x-4)^2} =$$

$$\frac{3(x-4-20)(x-4+20)}{(x-4)^2} = \frac{3(x-24)(x+16)}{(x-4)^2} \text{ qui est du signe du numérateur puisque le dénominateur est un carré}$$

Le numérateur s'annule en $x = 24$ et $x = -16$ et est du signe de $a = 3 > 0$ sur $]\infty; -16] \cup [24; +\infty[$ est positif sur $[-16; 24]$.

6. Le tableau de variation complet de f :

x	-4	24	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

7. Résolution du problème posé : les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale sont 24 et 18 et l'aire de la page est 432 cm^2 .

EXERCICE 3 : On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-contre.

1. L'ensemble de définition de f est $]-\infty ; 1] \cup [1 ; +\infty[$.

2. La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0	+
$f(x)$	5		2	5

3. a) L'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions, l'une sur l'intervalle $]1 ; 4[$ et l'autre sur $]4 ; +\infty[$.

En effet : la fonction f est continue et strictement décroissante de $]1 ; 4[$ dans $]2 ; +\infty[$ et $3 \in]2 ; +\infty[$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]1 ; 4[$.

De même, la fonction f est continue et strictement croissante de $]2 ; +\infty[$ dans $]2 ; 5[$ et $3 \in]2 ; 5[$; d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]2 ; +\infty[$.

EXERCICE 4 :

La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$.

a) Si pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: VRAI car si $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$, alors pour tout réel $x > 0$, $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; par les théorèmes de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

b) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: VRAI : par la contraposée : si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ réel ; dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est négatif ou nul ; dans les deux cas $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 2$.

c) Si pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq \sqrt{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: VRAI car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et par les théorèmes de comparaison.

d) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$: FAUX ; un contre-exemple : $f(x) = x^2$, on a bien $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.