

EXERCICE 1 (10 points)

Partie A :

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.
2. Montrer que pour tout réel x , $x^2 e^{-x} = 4 \left(\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2$.
3. En déduire la limite de $x^2 e^{-x}$ en $+\infty$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser s'il existe des asymptotes à la courbe représentative de f .
3. Déterminer la fonction dérivée de cette fonction f .
4. Étudier les variations de cette fonction.
5. Donner le tableau de variation complet de f .
6. a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
- b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution α .

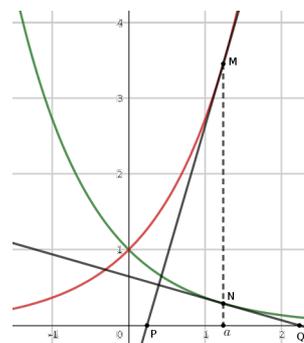
EXERCICE 2 (6 points)

Pour cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan. Pour tout réel a , on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a . La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P , la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q . (figure ci-contre).

Démontrer que la longueur PQ est égale à une constante, et déterminer cette constante.



EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96% de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60% de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98%.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A: « la bille a été fabriquée par la machine A »;

B: « la bille a été fabriquée par la machine B »;

V: « la bille est vendable ».

1. Réaliser un arbre de probabilités de la situation (les probabilités sur les branches seront complétées au fur et à mesure de l'exercice).
2. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
3. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
4. Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison?