EXERCICE 1 : Partie A : 1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Et $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ qui est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x}$;

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

2. Pour tout réel x, $4\left(\dfrac{x}{2} e^{\frac{-x}{2}}\right)^2 = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(e^{\frac{-x}{2}}\right)^2 = 4\dfrac{x^2}{4}e^{-x} = x^2e^{-x}$.

3. En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on obtient $x^2e^{-x} = 4\left(X e^{-X}\right)^2$;

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} 4\left(X e^{-X}\right)^2 = 0$, puisque $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

1. On a $f(x) = x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + e^{-x}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 1 = +\infty$ (limite du terme de plus haut degré d'un polynôme) et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$;

donc par produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

3. La fonction dérivée de cette fonction f : $f'(x) = (2x - 4)e^{-x} + (x^2 - 4x + 1)(-e^{-x}) = (-x^2 + 6x - 5)e^{-x}$.

4. Comme $e^{-x} > 0$ sur IR , le signe de $f'(x)$ est celui du polynôme $-x^2 + 6x - 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times(-1)\times(-5) = 16 > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+4}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-4}{-2} = 5$.

La fonction dérivée est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty ; 1] \cup [5 ; +\infty[$ et positive sur $[1 ; 5]$.

5. Le tableau de variation complet de f :

$f(1) = (1^2 - 4\times1 + 1)e^{-1} = -2e^{-1}$;

$f(5) = (5^2 - 4\times5 + 1)e^{-5} = 6e^{-5}$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	$6e^{-5}$	$\searrow$	0

6. a) Sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$:

La fonction f est continue et strictement décroissante de $]-\infty ; 1]$ dans $]+\infty ; -2e^{-1}]$, et $2 \in]+\infty ; -2e^{-1}]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

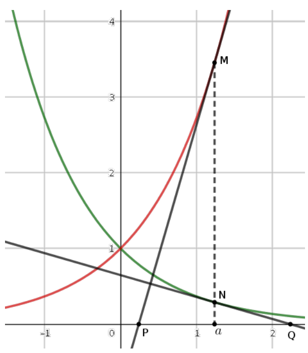
Sur l'intervalle $]1; +\infty[$: La fonction f admet un maximum égal à $6e^{-5} \simeq 0{,}04$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans IR.

b) A l'aide de la calculatrice, on trouve $f(-0{,}16) = 1{,}95$ et $f(-0{,}17) = 2{,}02$;

Une valeur approchée à 10^{-2} près de α est $-0{,}16$ ou $-0{,}17$.

EXERCICE 2 : Soient f et g les fonctions définies sur IR par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.



On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan. Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a. La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

La tangente en M à C_f a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a) = e^a(x - a) + e^a$;

La tangente en N à C_g a pour équation $y = g'(a)(x - a) + g(a) = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}$;

L'abscisse de P vérifie l'équation $e^a(x - a) + e^a = 0$, d'où $e^a(x - a) = -e^a$, d'où $x - a = -1$, et $x = a - 1$.

L'abscisse de Q vérifie l'équation $-e^{-a}(x - a) + e^{-a} = 0$, d'où $-e^{-a}(x - a) = -e^{-a}$, d'où $x - a = 1$, et $x = a + 1$.

La longueur PQ est égale à $\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(a+1-(a-1))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$, donc PQ est une constante $= 2$.

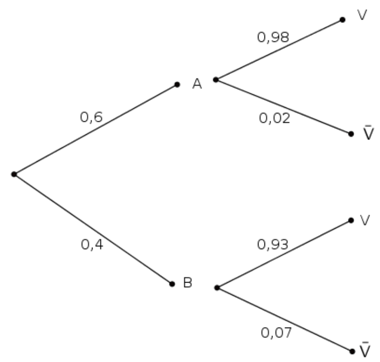
EXERCICE 3 : Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm. Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

• 96% de la production journalière est vendable.
• La machine A fournit 60% de la production journalière.
• La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98%.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A: « la bille a été fabriquée par la machine A »;
B: « la bille a été fabriquée par la machine B »;
V: « la bille est vendable ».

1. L'arbre de probabilités de la situation :



2. La probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A est $p(A \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$.

3. On sait que $p(V) = 0{,}96 = P(B \cap V) + P(A \cap V)$, donc $P(B \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588 = 0{,}372$.

Ainsi $p_B(V) = \dfrac{p(B \cap V)}{p(B)} = \dfrac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93$.

D'où la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est

$p_V(B) = \dfrac{p(B \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0{,}372}{0{,}96} = 0{,}3875$.

4. Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B. La probabilité qu'une bille non vendable provienne de la machine B est $p_{\bar{V}}(B) = \dfrac{p(\bar{V} \cap B)}{p(\bar{V})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}07}{1 - 0{,}96} = \dfrac{0{,}028}{0{,}04} = 0{,}7$.

Oui, il a raison.