NOM : ……………………………...…...…………….. PRÉNOM : ………………………………………………

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 TERMINALE S 707 *Jeudi 8 février 2018*

EXERCICE 1 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x + 1)$.

1. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout réel strictement positif, $f(x) < 0$.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

Dans l'algorithme ci-contre, i et n sont des entiers naturels et u est un réel.

a) Compléter l'algorithme pour qu'il affiche la valeur de u_n pour un entier n strictement positif.

b) Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée de u_n lorsque $n = 4$.

4. Démontrer que pour tout entier n strictement positif, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

```
u ← 0
Pour i allant de 1 à ...
   u ← …
Fin Pour
u ← …
```

EXERCICE 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty [$ par $f(x) = x - \ln(x)$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f.

Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Démontrer qu'il existe un unique point A de la courbe (C) tel que la tangente au point A passe par l'origine du repère O. Déterminer les coordonnées du point A.

EXERCICE 3 (5 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
2. Déterminer alors le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$.
3. Écrire la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. Écrire la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE 4 (5 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = 0$.

a) Montrer que $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = (z + 1)(z^2 - 4z + 13)$.

b) Déterminer les solutions de (E). Les solutions complexes seront appelées z_A et z_B et la solution réelle z_C.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Placer les points A, B et C sur la figure ci-contre.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.