EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x+(x+1)^2-x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{-x+x^2+2x+1-x^2+x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \text{ sur }]0\,;+\infty[.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
donc pour tout réel x strictement positif, $f(x) < 0$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$.

Dans l'algorithme ci-contre, i et n sont des entiers naturels et u est un réel.

a) L'algorithme complété :

```
u ← 0
Pour i allant de 1 à n
   u ← u + 1/i
Fin Pour
u ← u – ln(n)
```

b) $u_4 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \ln(4) = \dfrac{25}{12} - \ln(4) \simeq 0{,}697$.

4. Pour tout entier n strictement positif,

$u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)\right) =$
$\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = f(n)$.

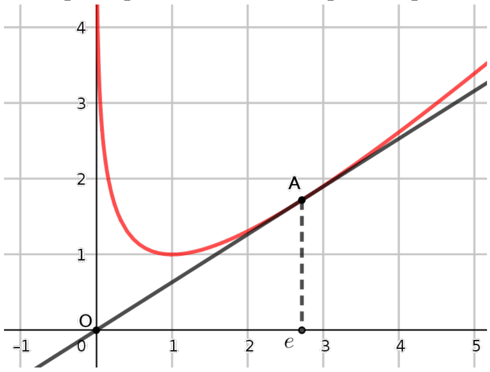
5. On a vu que pour tout réel $x > 0$, $f(x) < 0$ donc pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$; donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$ et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$.

1. $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$;

$f(x) = x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$; on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ qui est du signe de $x - 1$ sur $]0;+\infty[$, qui est négatif sur $]0\,;1]$ et positif sur $]1;+\infty[$; donc la fonction f est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $]1;+\infty[$.



3. L'équation de la tangente à la courbe (C) en A d'abscisse a est
$y = f'(a)(x-a) + f(a) = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)(x-a) + a - \ln(a) =$
$\left(\dfrac{a-1}{a}\right)x - (a-1) + a - \ln(a) = \dfrac{a-1}{a}x + 1 - \ln(a)$. La tangente au point A passe par l'origine du repère O si l'ordonnée à l'origine est nulle, soit $1 - \ln(a) = 0$ équivaut à $\ln(a) = 1$ équivaut à $a = e$. L'abscisse de A est e et son ordonnée est $f(e) = e - \ln(e) = e - 1$. $A(e\,;e-1)$.
Il existe bien un unique point A de la courbe (C) tel que la tangente au point A passe par l'origine du repère O.

EXERCICE 3 : On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

1. Les formes exponentielles des nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$:

$|z_1| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; soit $\theta = \arg(z_1)$; $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; d'où $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; soit $\theta = \arg(z_2)$; $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d'où $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Ainsi $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ $[2\pi]$.

3. La forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

4. La forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$.

5. Ainsi $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

<u>EXERCICE 4 :</u> On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = 0$.

a) On développe l'expression : $(z + 1)(z^2 - 4z + 13) = z^3 - 4z^2 + 13z + z^2 - 4z + 13 = z^3 - 3z^2 + 9z + 13$.D'où le résultat.

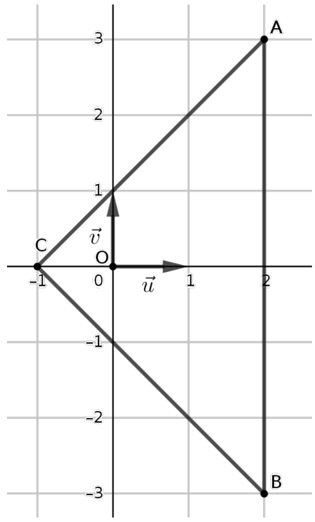
b) Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul :
$z + 1 = 0$ donne $z = -1$; $z^2 - 4z + 13 = 0$; on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times13 = -36 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$.

Donc l'ensemble solution de l'équation (E) : S = {– 1 ; 2 + 3i ; 2 – 3i}.

Ainsi $z_A = 2 + 3i$, $z_B = 2 - 3i$ et la solution réelle $z_C = -1$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Les points A, B et C sur la figure :



3. On conjecture que le triangle ABC est rectangle isocèle en C :

$CA = |z_A - z_C| = |2 + 3i + 1| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

$CB = |z_B - z_C| = |2 - 3i + 1| = |3 - 3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Donc CA = CB et ABC est isocèle en C.

$(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right) = \arg\left(\frac{2+3i+1}{2-3i+1}\right) = \arg\left(\frac{3+3i}{3-3i}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) =$
$\arg\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right) = \arg\left(\frac{2i}{2}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux ; donc le triangle ABC est aussi rectangle en C.