

EXERCICE 1 (13 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x-1)e^{1-x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

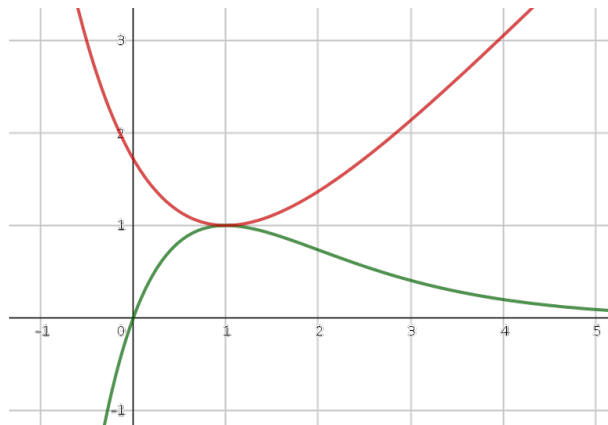
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x + e^{1-x} - 1.$$

- Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3. Sur la figure ci-contre, on a tracé les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g .

- Montrer que les courbes C_f et C_g se coupent en un seul point dont on donnera les coordonnées.
- Déterminer l'aire en unité d'aire du domaine D délimité par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
- Hachurer sur la figure ci-contre le domaine D .



4. Soit a un réel > 1 .

a) Montrer que l'intégrale $I(a) = \int_1^a f(x) dx = 2 - \left(\frac{ea}{e^a} + e^{1-a} \right)$.

b) Donner une interprétation géométrique de $I(a)$.

c) Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$.

d) L'algorithme ci-contre permet de déterminer la plus petite valeur entière de a telle que $I(a)$ soit une valeur approchée de $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$ à 10^{-p} près.

Compléter l'algorithme ci-contre avec $p=3$.

Déterminer cette valeur de a .

$a \leftarrow 2$

Tant que $\left(\frac{ea}{e^a} + e^{1-a} \right) > \dots$

$a \leftarrow a + 1$

Fin tant que

EXERCICE 2 (7 points)

On considère la fonction f_n définie sur $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 . (On admet que pour tout x de $[0 ; 1]$, $x^0 = 1$).

2. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < I_n \leq 1$.

4. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer $\int_0^1 (1 - x^n) dx$.

6. Montrer que I_n est convergente et déterminer sa limite.