CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 TERMINALE S 707

EXERCICE 1 : 1. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = xe^{1-x}$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty}(1-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$, par produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$f(x) = xe^{1-x} = \dfrac{xe}{e^x}$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur IR et $f'(x) = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$;
$f'(x)$ est du signe de $1 - x$ puisque $e^{1-x} > 0$. $x \to 1 - x$ est une fonction affine avec $a = -1 < 0$;
donc $f'(x) \leq 0$ sur $[1 ; +\infty[$ et $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 1]$.
D'où le tableau de variations de f sur IR :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c) Pour montrer que la fonction F définie sur IR par $F(x) = (-x-1)e^{1-x}$ est une primitive de la fonction f sur IR, on montre que $F'(x) = f(x)$:
$F'(x) = (-1)e^{1-x} + (-x-1)(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(-1 + x + 1) = xe^{1-x} = f(x)$. CQFD.

2. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = x + e^{1-x} - 1$.
a) La fonction g est dérivable sur IR et $g'(x) = 1 - e^{1-x}$;
$g'(x) \geq 0$ équivaut à $1 - e^{1-x} \geq 0$ équivaut à $e^{1-x} \leq 1$ équivaut à $1 - x \leq \ln(1)$ équivaut à $1 - x \leq 0$ équivaut à $x \geq 1$.
donc $g'(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$ et $g'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 1]$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(1-x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$, et par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$g(x) = x(1 + \dfrac{e}{xe^x}) - 1$. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1+\dfrac{e}{xe^x}\right) = -\infty$, et

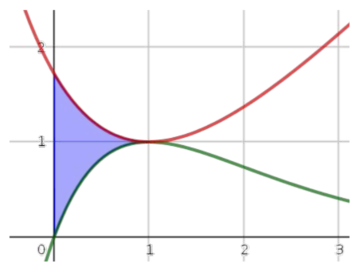
par produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

3. Sur la figure ci-contre, on a tracé les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g.
a) Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $xe^{1-x} = x + e^{1-x} - 1$ équivaut à $xe^{1-x} - x - e^{1-x} + 1 = 0$ équivaut à $(x-1)e^{1-x} - (x-1) = 0$ équivaut à $(x-1)(e^{1-x} - 1) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul :
$x - 1 = 0$ donne $x = 1$; $e^{1-x} - 1 = 0$ équivaut à $e^{1-x} = 1$ équivaut à $1 - x = \ln(1) = 0$ équivaut à $x = 1$.
Donc la solution de l'équation est $x = 1$; l'ordonnée du point d'intersection est $f(1) = 1$.
Autre méthode : D'après les variations des fonctions précédentes, les courbes C_f et C_g se coupent au point de coordonnées $(1 ; 1)$.

b) L'aire en unité d'aire du domaine D délimité par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx =$

$\left[\dfrac{x^2}{2} - e^{1-x} - x\right]_0^1 - [F(x)]_0^1 = \dfrac{1}{2} - e^0 - 1 - (0 - e - 0) - (F(1) - F(0)) =$

$\dfrac{-3}{2} + e - ((-1-1)e^0 - (0-1)e^1) = \dfrac{1}{2}$.



c) Le domaine D hachuré ci-contre.

4. Soit a un réel > 1.
a) Montrer que l'intégrale $I(a) = \int_1^a f(x)\,dx = F(a) - F(1) = (-a-1)e^{1-a} - (-1-1)e^{1-1} =$

$(-a-1)e^{1-a} + 2 = 2 - (a+1)e^{1-a} = 2 - (aee^{-a} + e^{1-a}) = 2 - \left(\dfrac{ae}{e^a} + e^{1-a}\right)$.

b) La fonction f est positive sur $[1 ; +\infty[$, donc $I(a)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

c) D'après la question 1, $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{ae}{e^a} = 0$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} e^{1-a} = 0$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a) = 2$.

d) L'algorithme ci-contre permet de déterminer la plus petite valeur entière de a telle que $I(a)$ soit une valeur approchée de $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a)$ à 10^{-p} près.
L'algorithme complété avec $p = 3$.

$a \leftarrow 2$
Tant que $\left(\dfrac{ae}{e^a} + e^{1-a}\right) > 10^{-3}$
$\quad a \leftarrow a + 1$
Fin tant que

La valeur de a est 11. En effet, $\left(\dfrac{10e}{e^{10}} + e^{1-10}\right) \simeq 0{,}0014 > 10^{-3}$ et $\left(\dfrac{11e}{e^{11}} + e^{1-11}\right) \simeq 0{,}0005 < 10^{-3}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 0{,}5\,dx = [0{,}5x]_0^1 = 0{,}5$;

et $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

2. Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq x^n \leq 1$; $1 \leq 1 + x^n \leq 2$; $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$;

donc $0 < \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, d'après l'inégalité précédente, on a donc $\displaystyle\int_0^1 0\,dx < I_n \leq \int_0^1 1\,dx$.

On a $\displaystyle\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$, donc $0 < I_n \leq 1$.

4. Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq x^{2n} \leq 1$; $-1 \leq -x^{2n} \leq 0$; $0 \leq 1 - x^{2n} \leq 1$;
$0 \leq (1 - x^n)(1 + x^n) \leq 1$; en divisant par $(1 + x^n)$, on obtient $1 - x^n \leq \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,dx$ = [$\left[x - \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = 1 - \dfrac{1}{n+1} - 0 = \dfrac{n}{n+1}$.

6. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; de plus pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,dx < I_n \leq 1$, soit $\dfrac{n}{n+1} < I_n \leq 1$,

donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(n) = 1$. Donc I_n est convergente et sa limite est 1.