

EXERCICE 1 :

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36.

On a alors, à 10^{-3} près : réponse b. $P(X \leq 81,2) \approx 0,301$; Résultat obtenu à la calculatrice.

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.

Une valeur approchée à 10^{-3} près du réel u tel que $P(X \geq u) = 0,92$ est :

On a $P(X \geq u) = 1 - P(X < u) = 0,92$ équivaut à $P(X < u) = 0,08$;

A l'aide de la calculatrice, avec InvNormale ou FracNormale : aire = 0,08, $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on trouve $u = -1,405$ réponse b.

3. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2. Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite.

Si X suit la loi normale de paramètres $\mu = 50$ et $\sigma = 2$, alors la loi $N = \frac{X-50}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$X > 52$ équivaut à $X - 50 > 2$ équivaut à $N = \frac{X-50}{2} > 1$ donc $P(X > 52) = P(N > 1)$. $P(N > 1) = P(N < -1)$ et

$P(-1 < N < 1) = 1 - 2P(N > 1)$ et donc $P(N > 1) = 1 - \frac{P(-1 < N < 1)}{2}$. Réponse c.

4. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0,5$.

La loi exponentielle étant une loi à durée de vie sans vieillissement, $P_{(T>2)}(T > 5) = P(T > 3)$.

D'après le cours : $P(T > 3) < P(T > 2)$. Donc la seule réponse possible est 0,35 (a.) qui est inférieure à 0,5.

5. Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.

Comme $E(Z) = 5$, alors $\lambda = 1/5 = 0,2$.

$p(Z < 5) = 1 - e^{1-0,2 \times 5} = 1 - e = \frac{e-1}{e}$. Réponse b.

EXERCICE 2 :

1. Une représentation paramétrique de la droite (CD) :

Le vecteur $\overrightarrow{CD} (4 ; 0 ; -4)$ donc $\vec{u} (1 ; 0 ; -1)$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par $C(0 ; 3 ; 2)$;

on obtient une représentation paramétrique de (CD) :
$$\begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. $B(4 ; -1 ; 0)$. Soit t le paramètre associé à M alors $M(t ; 3 ; 2 - t)$.

Alors $BM^2 = (t - 4)^2 + (4)^2 + (2 - t)^2 = 2t^2 - 12t + 36 = 2(t^2 - 6t + 18)$.

BM est minimale quand BM^2 l'est donc quand $t^2 - 6t + 18$ est minimal.

On sait que tout polynôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un minimum en $t = -\frac{b}{2a}$;

BM est donc minimale pour $t = 3$ soit pour $M(3 ; 3 ; -1)$.

b. $\overrightarrow{BH} (-1 ; 4 ; -1)$ et $\overrightarrow{CD} (4 ; 0 ; -4)$; donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = (-1) \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0$.

On en déduit que (BH) et (CD) sont orthogonales et comme H est sur (CD), elles sont perpendiculaires.

c. D'après ce qui précède, (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD.

Alors l'aire du triangle BCD = $\frac{CD \times BH}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 12$ u. a.

L'aire de BCD est donc bien de 12 cm².

3. a. $\overrightarrow{BC} (-4 ; 4 ; 2)$ et $\overrightarrow{CD} (4 ; 0 ; -4)$ ne sont évidemment pas colinéaires donc B, C et D ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 4 + 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 8 + 0 + 8 = 0$; $\vec{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. $\vec{n} (2 ; 1 ; 2)$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x + y + 2z + d = 0$;

$C(0 ; 3 ; 2)$ appartient à (BCD) donc $2x_C + y_C + 2z_C + d = 0$ équivaut à $d = -7$; D'où (BCD) : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\vec{n}$ pour vecteur directeur, on a alors $\Delta: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

d. I est un point de (BCD) donc $2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0$ de plus $I \in \Delta$, donc il existe un réel t tel que $2(2 + 2t) + (1 + t) + 2(4 + 2t) - 7 = 0$ équivaut à $9t = -6$ équivaut à $t = -\frac{2}{3}$; On en déduit $I(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3})$.

Remarque: on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que (AI) est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.

$$AI = \sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2 ; \text{ le volume du tétraèdre ABCD} = \frac{\text{aire(BCD)} \times AI}{3} = \frac{12 \times 2}{3} = 8 \text{ cm}^3.$$