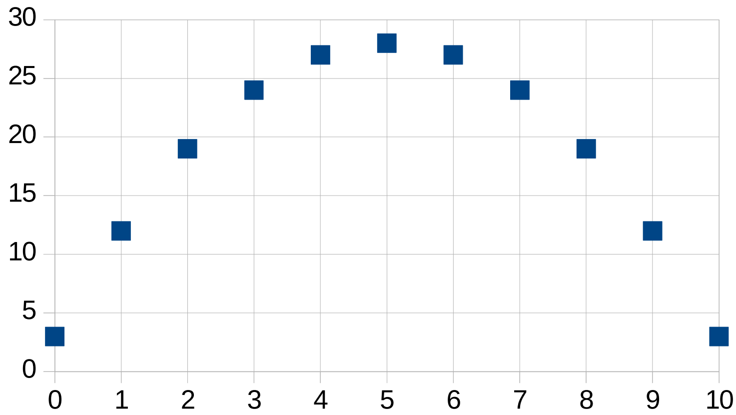
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 1 TERMINALE S

EXERCICE 1 : Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n + 9$.

1. Le tableau des valeurs de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	3	12	19	24	27	28	27	24	19	12	3

2. a) Représentation des 10 premiers termes de la suite :



b) Le nuage fait penser à une parabole représentative d'un polynôme du second degré, soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = 5$ et $\beta = f(\alpha) = 28$; la forme canonique de f est donc $f(x) = a(x-5)^2 + 28$; de plus $f(0) = 3$, soit $a(0-5)^2 + 28 = 3$, d'où $25a + 28 = 3$, soit $a = -1$.
Donc $f(x) = -(x-5)^2 + 28 = -x^2 + 10x + 3$.

3. On conjecture l'expression de la fonction f telle que $f(n) = u_n$: $u_n = f(n) = -n^2 + 10n + 3$.

4. On en déduit les variations de la suite (u_n) : La suite (u_n) est croissante jusqu'à $n = 5$, puis décroissante pour $n \geq 5$.

5. On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 3
Pour k variant de 0 à p
    U ← U – 2*k + 9
Fin de Pour
Afficher U
```

a) L'algorithme pour $p = 3$:

U	k
3	0
12	1
19	2
24	3
27	

b) En sortie, on obtient le nombre 27.

c) Modification de l'algorithme pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p :

```
U ← 3
Pour k variant de 0 à p
    U ← U – 2*k + 9
    Afficher U
Fin de Pour
```

EXERCICE 2 : Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$.

1. Calcul des 5 premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 6$; $u_1 = \dfrac{2+u_0}{u_0} = \dfrac{2+6}{6} = \dfrac{4}{3}$;

$u_2 = \dfrac{2+u_1}{u_1} = \dfrac{2+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$; $u_3 = \dfrac{2+u_2}{u_2} = \dfrac{2+2{,}5}{2{,}5} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$; $u_4 = \dfrac{2+u_3}{u_3} = \dfrac{2+1{,}8}{1{,}8} = \dfrac{19}{9}$.

2. La suite n'est pas monotone puisque $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$, etc...

3. L'algorithme permettant d'afficher les 20 premiers termes de la suite :

```
U ← 6
Pour k variant de 0 à 19
    U ← (U + 2)/U
    Afficher U
Fin Pour
```

4. Conjecture : Un majorant M = 6, un minorant $m = 1$ et la limite $l = 2$.

5. Montrons que pour tout entier naturel n, la propriété (P_n) : $1 \leq u_n \leq 6$ est vraie par un raisonnement par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$: $1 \leq u_0 \leq 6$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété (P_n) est vraie pour un entier $n \geq 0$, et montrons que (P_{n+1}) est vraie :

$u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n} = \dfrac{2}{u_n} + 1$. Donc $1 \leq u_n \leq 6$ implique $\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 1$ implique $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{u_n} \leq 2$ implique $\dfrac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 6$. L'hérédité est vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 6$.