EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ existe pour tout réel x.
Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour étudier les variations de cette fonction f sur $\mathbb{R}$, on détermine sa fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Si $x \leq 0$, $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ (comme somme de deux nombres négatifs) ;
si $x > 0$, on sait que $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ (par la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$),
soit $x < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$.
Donc pour tout réel x, $f'(x) < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donnée par
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -1x + 1 = -x + 1$.

4. Pour montrer que la courbe représentative de f est toujours située au-dessus de cette tangente T, on étudie le signe de la différence : $f(x) - (-x + 1) = \sqrt{x^2+1} - 1$.
Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1$, $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, soit $\sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0$.
Ainsi $f(x) \geq -x + 1$; donc la courbe C_f est située au-dessus de la tangente T.

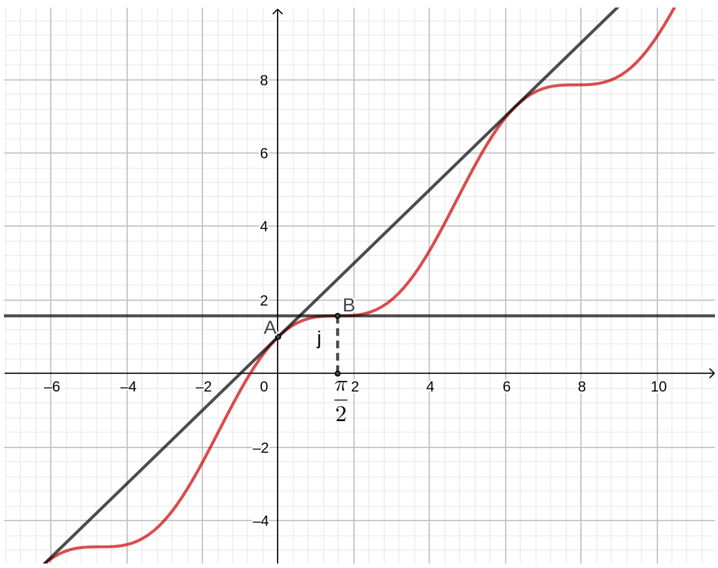
5. Pour tout réel x, $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$, soit $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$; donc $f(x) > 0$.

6. On sait que $f(x) > 0$; on cherche x tel que $f(x) < 10^{-3}$, soit $\sqrt{x^2+1} - x < 10^{-3}$, soit $\sqrt{x^2+1} < x + 10^{-3}$,
on élève au carré : $x^2 + 1 < (x + 10^{-3})^2$, soit $x^2 + 1 < x^2 + 2x10^{-3} + 10^{-6}$, soit $2x10^{-3} > 1 - 10^{-6}$,
soit $x > \frac{1-10^{-6}}{2\times10^{-3}}$, soit $x > 499{,}9995$. Par exemple, $f(500) = \sqrt{500^2+1} - 500 \simeq 0{,}00099 < 10^{-3}$.
Et comme f est strictement décroissante, pour $x > 499{,}9995$, $f(x) < 10^{-3}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + x$.

1. Pour étudier les variations de cette fonction f sur $\mathbb{R}$, on détermine sa fonction dérivée :
$f'(x) = -\sin(x) + 1$. On sait que pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-1 \leq -\sin(x) \leq 1$,
donc $0 \leq -\sin(x) + 1 \leq 2$, donc $f'(x) \geq 0$, et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La courbe représentative de f admet des tangentes horizontales, s'il existe x tel que $f'(x) = 0$;
soit $-\sin(x) + 1 = 0$ équivaut à $\sin(x) = 1$.
Les solutions de cette équation sont $\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec k entier naturel$\}$.
Donc il y a une infinité de solutions, et la courbe représentative de f admet une infinité de tangentes horizontales (comme en B ci-contre).



3. Une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 0 :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1x + 1 = x + 1$.

4. Pour montrer que la courbe représentative de f est toujours située en-dessous de cette tangente T, on étudie le signe de la différence :
$f(x) - (x + 1) = \cos(x) + x - (x + 1) = \cos(x) - 1$.
Pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$,
donc $-2 \leq \cos(x) - 1 \leq 0$, donc $f(x) - (x + 1) \leq 0$.

Ainsi $f(x) \leq x + 1$; donc la courbe C_f est située en-dessous de la tangente T.