CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 4 TERMINALE S

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x^2-4x+1 \; si \; x \leq -1 \\ -2x+2 \; si -1<x<0 \\ \dfrac{x+10}{5x+5} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$.

1. Les fonctions $x \to -x^2 - 4x + 1$, $x \to -2x + 2$, et $x \to \dfrac{x+10}{5x+5}$ sont continues sur leur ensemble de définition.

Il faut donc montrer que f est continue en -1 et en 0 :

$\lim\limits_{x \to -1} (-2x+2) = 4$ et $f(-1) = -(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 4$; donc la fonction f est continue en -1.

$\lim\limits_{x \to 0} (-2x+2) = 2$ et $f(0) = \dfrac{0+10}{5 \times 0+5} = 2$; donc la fonction f est continue en 0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2-4x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(-x-4+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x-4) = +\infty$ par somme et produit de limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+10}{5x+5}$: $\dfrac{x+10}{5x+5} = \dfrac{x\left(1+\dfrac{10}{x}\right)}{x\left(5+\dfrac{5}{x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{10}{x}}{5+\dfrac{5}{x}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x} = 0$, donc,

par quotient de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

3. Pour étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, on étudie les variations de chacune des fonctions sur l'intervalle sur lequel elle est définie :

$f_1(x) = -x^2 - 4x + 1$ sur $]-\infty ; -1]$; $f_1'(x) = -2x - 4$ qui s'annule en $x = -2$;

et $f_1'(x) \geq 0$ si $x \leq -2$; $f_1'(x) \leq 0$ si $-2 \leq x \leq -1$;

$f_2(x) = -2x + 2$ sur $]-1 ; 0[$; $f_2'(x) = -2 < 0$ si $-1 < x < 0$;

$f_3(x) = \dfrac{x+10}{5x+5}$ sur $[0 ; +\infty[$; $f_3'(x) = \dfrac{1(5x+5)-5(x+10)}{(5x+5)^2} = \dfrac{-45}{(5x+5)^2} < 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

4. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	4	↘	2	↘	$0{,}2$

5. La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1]$, $]-1 ; 0[$ et $[0 ; +\infty[$; il s'agit d'étudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 :

$f_1'(-1) = -2(-1) - 4 = -2$; et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f'(x) = -2$

donc f est dérivable en -1.

$f_1'(0) = \dfrac{-45}{(5 \times 0+5)^2} = \dfrac{-45}{25} = \dfrac{-9}{5} = -1{,}8$; et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = -2$; donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Ainsi f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

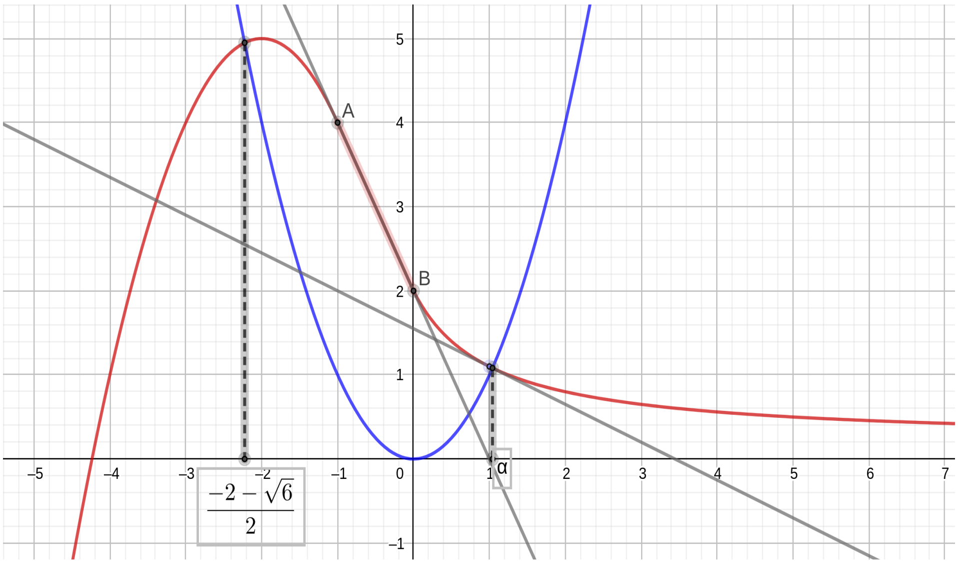
6. Représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessous.

Tracé des tangentes aux points A, B et C d'abscisses -1, 0 et 1.

Tangente en A et B : c'est la droite (AB) d'équation $y = -2x + 2$.

Tangente en C : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \dfrac{-45}{(5 \times 1+5)^2}(x-1) + \dfrac{1+10}{5 \times 1+5} = -0{,}45(x-1) + 1{,}1 = -0{,}45x + 1{,}55$.

7. On cherche à résoudre l'équation (E) : $f(x) = x^2$.



a) On peu résoudre l'équation sur $]-\infty\ ;-1]$:

L'équation s'écrit
$-x^2-4x+1 = x^2$ équivaut à
$-2x^2-4x+1 = 0$.
$\Delta = b^2-4ac =$
$(-4)^2-4\times(-2)\times 1 = 24 > 0$,
donc l'équation a deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{24}}{2\times(-2)} = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{24}}{2\times(-2)} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$. Comme la solution est dans $]-\infty\ ;-1]$, cette solution est $x_1 = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$

b) Sur $\mathbb{R}^+$, l'équation (E) est $\frac{x+10}{5x+5} = x^2$ équivaut à $x+10 = x^2(5x+5)$ équivaut à $x+10 = 5x^3+5x^2$ équivaut à $5x^3+5x^2-x-10 = 0$.

c) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = 5x^3+5x^2-x-10$.
La dérivée de g est $g'(x) = 15x^2+10x-1$. On étudie le signe de cette dérivée :
$\Delta = b^2-4ac = 10^2-4\times 15\times(-1) = 160 > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{160}}{2\times 15} = \frac{-10+4\sqrt{10}}{30} = \frac{-5+2\sqrt{10}}{15} > 0$ et
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-\sqrt{160}}{2\times 15} = \frac{-10-4\sqrt{10}}{30} = \frac{-5-2\sqrt{10}}{15} < 0$.
D'où le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-10 ↘	$g(\frac{-5+2\sqrt{10}}{15})$	↗ $+\infty$

On a $g(\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}) \simeq -10{,}05$.

Sur $[0\ ;\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}]$, la fonction g est décroissante et $g(0) = -10 < 0$; donc l'équation (E) n'a pas de solution sur $[0\ ;\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}]$.

Sur $]\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}\ ;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante de $]\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}\ ;+\infty[$ dans $]g(\frac{-5+2\sqrt{10}}{15})\ ;+\infty[$; et 0 appartient à $]g(\frac{-5+2\sqrt{10}}{15})\ ;+\infty[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{-5+2\sqrt{10}}{15}\ ;+\infty[$. Ainsi l'équation (E) a une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$.

d) Dans l'algorithme ci-contre, a et b sont des réels, e est un réel donnant la précision de la solution cherchée. Cet algorithme permet de calculer une valeur approchée de la solution α par la méthode dichotomique.

e) L'algorithme complété :

```
si f(a)*f(b) ≥ 0 alors afficher « pas de solution entre a et b »
sinon
    Tant que (b – a) > e  faire
        m ← (a + b)/2
        si f(a)*f(m) < 0 : b ← m
        sinon : a ← m
        finsi
     fin Tantque
  afficher ('une solution à ', e,' près est ', m)
```

f) Une valeur approchée à 10^{-4} de α est 1,0403.

g) Les solutions de (E) $\{\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\ ;\alpha\}$ sur le graphique ci-dessus.