

EXERCICE 1 : 1. Soient a et b les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

Alors $a^2 = (1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$;

et $b^2 = (1 - i\sqrt{3})^2 = 1 - 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

2. On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z .

En posant $Z = z^2$, l'équation (E) s'écrit $Z^2 + 4Z + 16 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes :

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3} = a^2 ; \text{ et}$$

$$Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3} = b^2 .$$

On trouve alors quatre solutions qui sont a , $-a$, b , $-b$.

3. On note A, B, C et D les images dans le plan complexe des solutions de l'équation (E), telles que les abscisses de A et B sont positives, les ordonnées de A et D sont positives.

On alors les affixes :

$A(1 + i\sqrt{3})$, $B(1 - i\sqrt{3})$, $C(-1 - i\sqrt{3})$ et $D(-1 + i\sqrt{3})$.

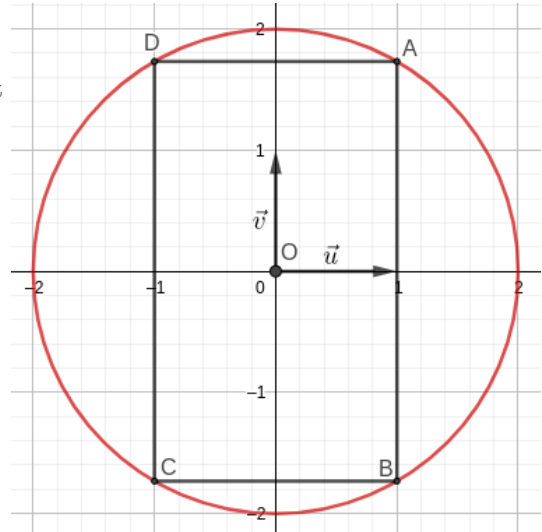
a) Les quatre points dans le plan :

b) Le quadrilatère ABCD est un rectangle ; en effet les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $-4i\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{DC}$ d'affixe $-4i\sqrt{3}$ sont égaux ; donc ABCD est un parallélogramme ; de plus, les diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4 ;$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4 ;$$

donc ABCD est bien un rectangle.



EXERCICE 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$,

et on considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le

point M' d'affixe $f(z) = \frac{z + i\bar{z}}{2}$. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $z_A = 2 + i$ et $z_B = -2 + 3i$.

1. Les affixes des points A' et B' images de A et B par f : $f(z_A) = \frac{2 + i + i(2 - i)}{2} = \frac{3 + 3i}{2} = 1,5 + 1,5i$.

$$f(z_B) = \frac{-2 + 3i + i(-2 - 3i)}{2} = \frac{1 + i}{2} = 0,5 + 0,5i.$$

1. L'équation $f(z) = z$ équivaut à $\frac{z + i\bar{z}}{2} = z$ équivaut à $z + i\bar{z} = 2z$ équivaut à $z = i\bar{z}$; en posant $z = x + iy$, on obtient $x + iy = i(x - iy)$ équivaut à $x + iy = ix + y$; d'où $y = x$ qui est l'équation d'une droite (d).

2. a) Soit $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$. L'affixe du vecteur $\vec{w}$ est $1 - i$.

$$\text{b) On a } \frac{f(z) - z}{1 - i} = \frac{\frac{z + i\bar{z}}{2} - z}{1 - i} = \frac{\frac{z + i\bar{z} - 2z}{2}}{1 - i} = \frac{-z + i\bar{z}}{2(1 - i)} = \frac{-x - iy + i(x - iy)}{2(1 - i)} = \frac{-x(1 - i) + y(1 - i)}{2(1 - i)} = \frac{-x + y}{2}$$

qui est un nombre réel. Donc $f(z) - z = \frac{-x + y}{2} (1 - i)$.

c) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $f(z) - z$ et l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est $1 - i$.

D'après la question précédente, $\overrightarrow{MM'} = \frac{-x + y}{2} \vec{w}$, donc les vecteurs sont colinéaires.

3. Ainsi le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite (MM'). On en déduit que M' appartient à une droite (d') passant par M et de vecteur directeur $\vec{w}$.

$$4. \forall z \in \mathbb{C}, f(f(z)) = f\left(\frac{z+i\bar{z}}{2}\right) = \frac{\frac{z+i\bar{z}}{2} + i\frac{\overline{\frac{z+i\bar{z}}{2}}}{2}}{2} = \frac{z+i\bar{z} + i(\bar{z}-iz)}{4} = \frac{2z+i2\bar{z}}{4} = \frac{z+i\bar{z}}{2} = f(z).$$

5. On en déduit que l'image de M' est le point M' , donc le point M' est invariant par f et est donc sur la droite (d) de la question 1. Donc M' est le point d'intersection des deux droites (d) et (d').

6. L'application f est la projection orthogonale sur la droite (d).

