CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 7 TERMINALE S

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x)=x^2-x\ln(1+x)+1$.

1. La fonction dérivée $f'(x)=2x-(1\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x})=2x-\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$; et la fonction dérivée seconde $f''(x)=2-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1(1+x)-x\times1}{(1+x)^2}=2-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{2(1+x)^2-(1+x)-1}{(1+x)^2}=\dfrac{2x^2+3x}{(1+x)^2}$; .

2. Le signe de $f''(x)$ est le signe de $2x^2+3x=x(2x+3)$ qui s'annule pour $x=0$ et $x=-1{,}5$, et est du signe de $a=2>0$ sur $]-\infty\ ;-1{,}5]\cup[0\ ;+\infty[$ et négatif sur $[-1{,}5\ ;0]$; donc la fonction f' est décroissante sur $]-1\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Elle admet un minimum atteint en $x=0$ et vaut $f'(0)=0$.

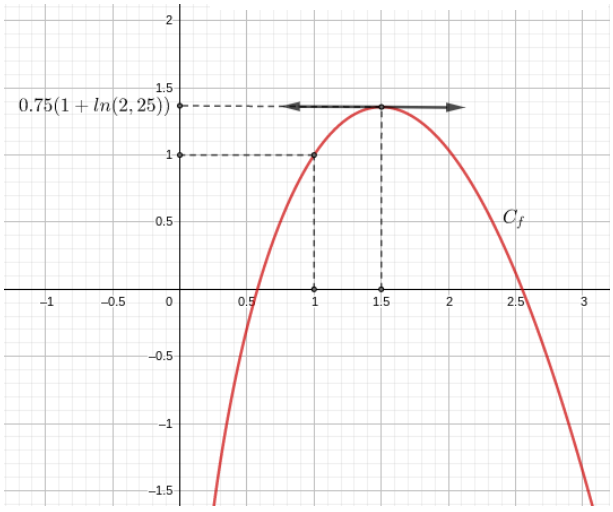
3. Comme le minimum de f' est 0, la fonction f' est positive sur $]-1\ ;+\infty[$.
Donc la fonction f est croissante sur $]-1\ ;+\infty[$.

4. $\lim\limits_{x\to-1}\ln(1+x)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-1}-x\ln(1+x)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$;
On peut écrire $f(x)=x^2\,(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x})+1=x^2\,(1-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\times\dfrac{1+x}{x})+1$.
En posant $X=1+x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{x}=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	||	↗	$+\infty$
	|| $-\infty$		

D'où le tableau de variations de f :
5. La fonction f est continue et strictement croissante de $]-1\ ;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
De plus $0\in\mathbb{R}$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1\ ;+\infty[$.
6. On a $f(0)=1$, donc $-1<\alpha<0$;
la calculatrice nous donne l'encadrement $-0{,}87<\alpha<-0{,}86$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx+c\ln(x)$ et sa courbe représentative C_f donnée ci-contre.



1. Par lecture graphique, on obtient
$f(1)=a+b+c\ln(1)=a+b=1$ (E_1) ;
$f(1{,}5)=2{,}25a+1{,}5b+c\ln(1{,}5)=0{,}75(1+\ln(2{,}25))$ (E_2) ;
la tangente à la courbe au point d'abscisse 1,5 est horizontale, donc $f'(1{,}5)=0$; et $f'(x)=2ax+b+\dfrac{c}{x}$, d'où
$f'(1{,}5)=3a+b+\dfrac{c}{1{,}5}=0$ (E_3) ;
on remplace b par $1-a$ dans les deux équations (E_2) et (E_3) :
$2{,}25a+1{,}5(1-a)+c\ln(1{,}5)=0{,}75(1+\ln(2{,}25))$
$3a+(1-a)+\dfrac{c}{1{,}5}=0$ équivaut à $2a+1+\dfrac{c}{1{,}5}=0$
équivaut à $3a+1{,}5+c=0$ équivaut à $c=-3a-1{,}5$;
on remplace $c=-3a-1{,}5$ dans (E_2) :
$2{,}25a+1{,}5(1-a)+(-3a-1{,}5)\ln(1{,}5)=0{,}75(1+\ln(2{,}25)$ équivaut à
$a(2{,}25-1{,}5-3\ln(1{,}5))+1{,}5-1{,}5\ln(1{,}5)=0{,}75+0{,}75\ln(1{,}5^2)$ équivaut à
$a(0{,}75-3\ln(1{,}5))=0{,}75+2\times0{,}75\ln(1{,}5)-1{,}5+1{,}5\ln(1{,}5)$ équivaut à
$a(0{,}75-3\ln(1{,}5))=-0{,}75+3\ln(1{,}5)$ équivaut à $a=-1$; d'où $b=2$ et $c=1{,}5$.
Ainsi $f(x)=-x^2+2x+1{,}5\ln(x)$.

2. La fonction dérivée $f'(x)=-2x+2+\dfrac{1{,}5}{x}=\dfrac{-2x^2+2x+1{,}5}{x}$.

3. Le signe de f' est le signe de $-2x^2+2x+1{,}5$ car $x>0$; et $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-2)\times1{,}5=16>0$, donc l'équation a deux solutions réelles:
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{2\times(-2)}=\dfrac{2}{-4}=-0{,}5$; et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-4}{2\times(-2)}=\dfrac{-6}{-4}=1{,}5$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $a=-2<0$ sur $]-\infty\ ;-0{,}5]\cup[1{,}5\ ;+\infty[$ et positif sur $[-0{,}5\ ;1{,}5]$;

donc la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ 1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\ ;\ +\infty[$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} (-x^2+2x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ par somme de limites ;

On peut écrire $f(x) = -x(x + 2 + 1{,}5\,\dfrac{\ln(x)}{x})$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2+1{,}5\dfrac{\ln(x)}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ par produit de limites.

D'où le tableau de variations :

x	0		$1{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$f(1{,}5)$	↘	$-\infty$

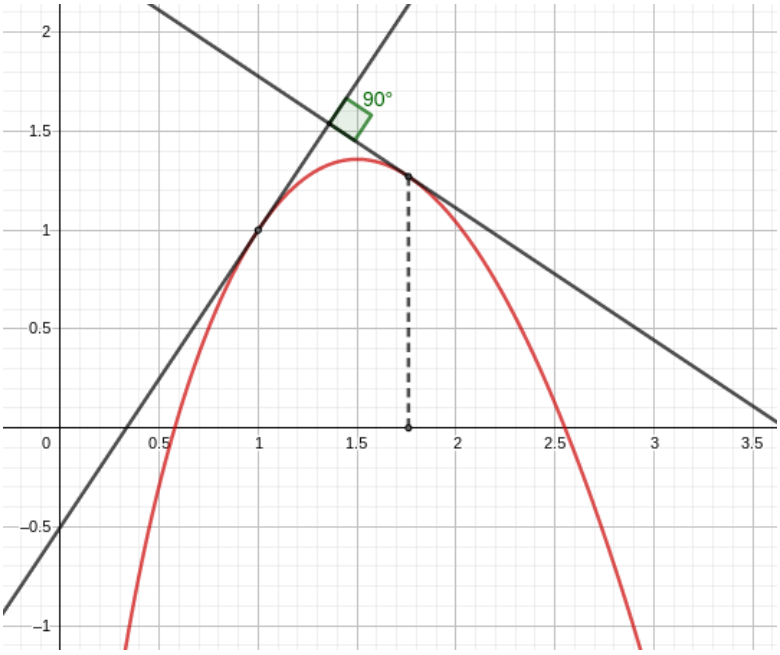
5. Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1{,}5(x - 1) + 1 = 1{,}5x - 0{,}5$.

6. Deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 ; donc on cherche un réel $x > 0$ tel que $1{,}5\times f'(x) = -1$, soit $f'(x) = \dfrac{-1}{1{,}5} = \dfrac{-2}{3}$,

soit $\dfrac{-2x^2+2x+1{,}5}{x} = \dfrac{-2}{3}$, équivaut à $3(-2x^2 + 2x + 1{,}5) = -2x$ équivaut à $-6x^2 + 6x + 4{,}5 = -2x$

équivaut à $-6x^2 + 8x + 4{,}5 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\times(-6)\times 4{,}5 = 172 > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{172}}{2\times(-6)} = \dfrac{-8+2\sqrt{43}}{-12} = \dfrac{4-\sqrt{43}}{6} < 0$ donc impossible ;

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{172}}{2\times(-6)} = \dfrac{-8-2\sqrt{43}}{-12} = \dfrac{4+\sqrt{43}}{6} \simeq 1{,}76$.

Ainsi l'abscisse d'un point de la courbe en lequel la tangente est perpendiculaire à la tangente précédente est $x = \dfrac{4+\sqrt{43}}{6}$.