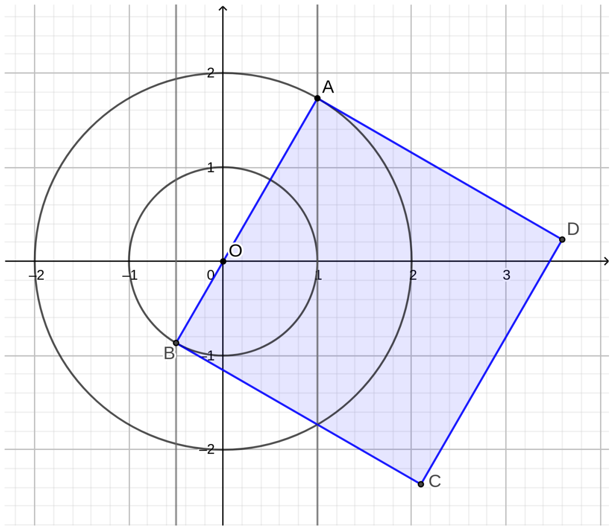
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 8 TERMINALE S

EXERCICE 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On considère les points A, B d'affixes respectives $a = 2\,e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $b = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$, et les points C et D d'affixes respectives c et d tels que : $a + c = b + d$ et $a + ib = c + id$.

$a + c = b + d$ équivaut à $a - b = d - c$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, donc ABCD est un parallélogramme.

De plus, $a + ib = c + id$ équivaut à
$a - c = id - ib = i(d - b)$;
ainsi $|a - c| = |i(d - b)| = |i||d - b| = |d - b|$;
donc CA = BD ; donc les diagonales de ABCD sont de même longueur, donc ABCD est un rectangle ;
$\arg(a - c) = \arg(i(d - b)) = \arg(i) + \arg(d - b)$;
donc $\arg(a - c) - \arg(d - b) = \arg(i)$, soit $\arg\left(\dfrac{a-c}{d-b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
soit $(\overrightarrow{BD} \ ; \ \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$;
donc les diagonales de ABCD sont perpendiculaires.
Ainsi, le quadrilatère ABCD est un carré.



EXERCICE 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Les points A, B et C ont pour affixes respectives a = − 4, b = 2i et c = 1.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives a′ = ωa, b′ = ωb et c′ = ωc où ω est le nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a. La forme trigonométrique et la forme exponentielle de ω : $|\omega| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$;

soit $\vartheta = \arg(\omega)$, alors $\cos(\vartheta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\vartheta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

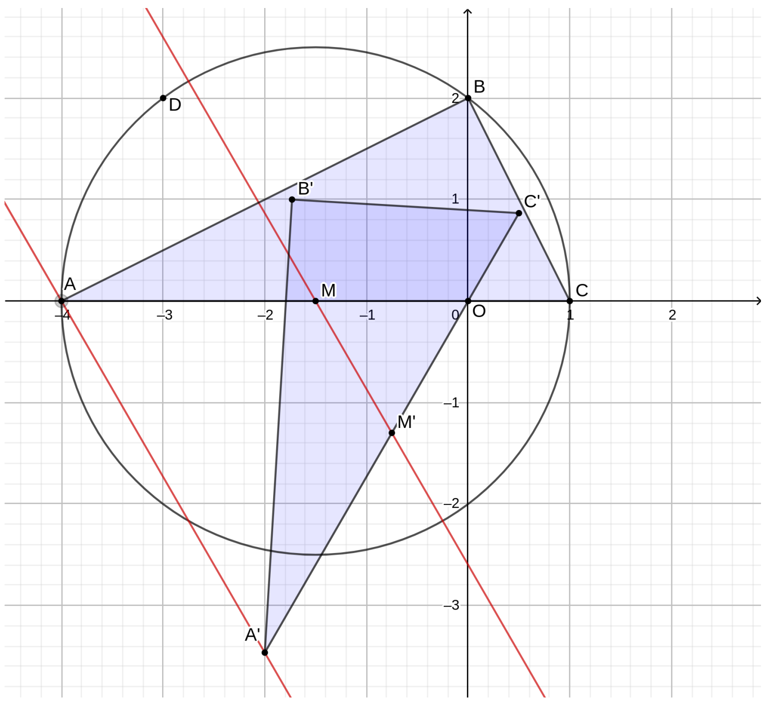
Ainsi $\omega = \cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3}) = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

On a $a = -4 = 4\,e^{i\pi}$, donc $a' = -4\,\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3} = 4\,e^{i\pi}\,e^{\frac{i\pi}{3}} = 4\,e^{\frac{4i\pi}{3}}$;

On a $b = 2i = 2\,e^{\frac{i\pi}{2}}$, donc $b' = 2i\,\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i = 2\,e^{\frac{i\pi}{2}}\,e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\,e^{\frac{5i\pi}{6}}$;

On a $c = 1 = e^{2i\pi}$, donc $c' = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

b. Les points A, B, C, A′, B′ et C′ sur le graphique :



2. a. $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{1-2i}{-4-2i} = \dfrac{(1-2i)(-4+2i)}{(-4-2i)(-4+2i)} = \dfrac{-4+2i+8i+4}{16+4} = \dfrac{10i}{20} = \dfrac{i}{2}$.

b. On en déduit une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

c. Donc le triangle ABC est rectangle en B.

3. Pour déterminer la nature du triangle A'B'C', on détermine une mesure de l'angle :
$(\overrightarrow{B'A'} ; \overrightarrow{B'C'}) = \arg\left(\frac{c'-b'}{a'-b'}\right) = \arg\left(\frac{\omega c-\omega b}{\omega a-\omega b}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc le triangle A'B'C' est rectangle en B'.

4. On note M le milieu du segment [AC].
a. On a $m = z_M = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-4+1}{2} = -1{,}5 = 1{,}5\,e^{\mathrm{i}\pi}$.
b. L'affixe m' de M' tel que $m' = \omega m = 1{,}5\,e^{\mathrm{i}\pi}\,e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 1{,}5\,e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = 1{,}5\,\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{-3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.
5. a. Les points A, B et C sont sur le cercle de centre M et de rayon AM = | − 1,5 − (− 4)| = 2,5.
En effet, MB = | 2i − (− 1,5)| = | 1,5 + 2i| = $\sqrt{1{,}5^2+2^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$;
MC = | 1 − (− 1,5)| = | 1 + 1,5| = 2,5. Ainsi MA = MB = MC, donc les points A, B et C sont sur le cercle de centre M et de rayon 2,5.

b. Le point D d'affixe − 3 + 2i est sur ce cercle si DM = 2,5 ;
on a DM = | − 3 + 2i − (− 1,5)| = | − 1,5 + 2i| = $\sqrt{(-1{,}5)^2+2^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$; donc D est sur le cercle.

6. Les droites (AA') et (MM') sont parallèles si les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires,
soit si $\arg\left(\frac{m'-m}{a'-a}\right)$ est égal à 0 modulo π ;
on a $\arg\left(\frac{m'-m}{a'-a}\right) = \arg\left(\frac{\frac{-3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}-(-1{,}5)}{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}-(-4)}\right) = \arg\left(\frac{\frac{-3-3\mathrm{i}\sqrt{3}+6}{4}}{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\frac{3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{4(2-2\mathrm{i}\sqrt{3})}\right) = \arg\left(\frac{3(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}\right) =$
$\arg\left(\frac{3}{8}\right) = 0$, donc les droites sont parallèles.