

EXERCICE 1 : Calcul des limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = 2n^3 - 8n - 13$; on factorise par n^3 : $u_n = n^3 (2 - \frac{8}{n^2} - \frac{13}{n^3})$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, donc, par

somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par produit de limites.

b) $u_n = \frac{n + \sin(n)}{2n+1}$; pour tout entier naturel n , $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n + \sin(n)}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}$.

On a $\frac{n-1}{2n+1} = \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-\frac{1}{n}) = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2+\frac{1}{n}) = 2$ et par quotient de limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

c) $u_n = \frac{1-2n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n(\frac{1}{n}-2)}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{\sqrt{n}(\frac{1}{n}-2)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$; on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n}-2) = -2$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$,

donc par produit et quotient de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

d) $u_n = \frac{1-0,7^n}{0,2^n+4}$. $0,7^n$ est le terme d'une suite géométrique de raison $0,7$, strictement comprise entre -1 et 1 ,

donc cette suite converge vers 0 ; même chose pour $0,2^n$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5}$.

1. Calcul des valeurs exactes de u_1, u_2 : $u_1 = \sqrt{4u_0+5} = \sqrt{4 \times 0 + 5} = \sqrt{5}$; et $u_2 = \sqrt{4u_1+5} = \sqrt{4\sqrt{5}+5}$.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 5$:

Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \leq u_0 \leq 5$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n , et on montre que P_{n+1} est vraie :

$0 \leq u_n \leq 5$ implique $0 \leq 4u_n \leq 20$ implique $5 \leq 4u_n + 5 \leq 25$; on prend la racine carrée de chaque membre positif (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), donc $\sqrt{5} \leq \sqrt{4u_n+5} \leq \sqrt{25} = 5$,

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 5$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 5$.

3. On démontre par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante :

Initialisation : $u_1 = \sqrt{5}$ et $u_0 = 0$, donc $u_0 \leq u_1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n , et on montre que P_{n+1} est vraie :

$u_n \leq u_{n+1}$ implique $4u_n \leq 4u_{n+1}$ implique $4u_n + 5 \leq 4u_{n+1} + 5$ implique $\sqrt{4u_n+5} \leq \sqrt{4u_{n+1}+5}$, donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est croissante.

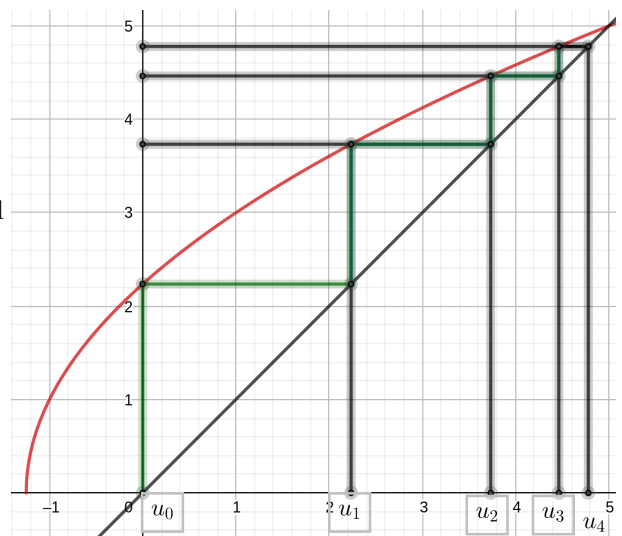
4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 5 , donc elle est convergente.

5. Représentation des cinq premiers termes de la suite :

Sa limite est l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite, soit solution de l'équation $\sqrt{4x+5} = x$ implique $4x+5 = x^2$, soit $x^2 - 4x - 5 = 0$;

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$; donc deux solutions : $x_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4-6}{2} = -1$.

Comme la limite est dans $[0 ; 5]$, cette limite est 5 .



EXERCICE 3 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$1. u_1 = u_0 + \frac{1}{(0+1)(0+2)} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} ; u_2 = u_1 + \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} ;$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{(2+1)(2+2)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} .$$

2. On conjecture que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$

3. On démontre cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence:

Initialisation : $u_0 = 0 = \frac{0}{1}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} .$$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$.

$$4. u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1, \text{ et par quotient de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

EXERCICE 4 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,5u_n - 4$.

1. Calcul des valeurs exactes de u_1 , u_2 et u_3 :

$$u_1 = 1,5u_0 - 4 = -2,5 ; u_2 = 1,5u_1 - 4 = 1,5 \times (-2,5) - 4 = -7,75 ; u_3 = 1,5u_2 - 4 = -15,625.$$

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 8$.

a) On démontre que la suite (v_n) est géométrique :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = 1,5u_n - 4 - 8 = 1,5u_n - 12 = 1,5(u_n - 8) = 1,5v_n$; donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 1 - 8 = -7$.

b) Donc, pour tout entier naturel n , $v_n = -7 \times 1,5^n$. Et $u_n = v_n + 8 = -7 \times 1,5^n + 8$.

$$3. \text{ La somme } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k + 8) = \sum_{k=0}^{n} v_k + 8(n+1).$$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \frac{1-1,5^{n+1}}{1-1,5} = -7 \frac{1-1,5^{n+1}}{-0,5} = 14(1-1,5^{n+1}).$$

$$\text{Donc } S_n = 14(1-1,5^{n+1}) + 8(n+1).$$

4. L'algorithme ci-contre permettant de calculer et d'afficher les 20 premiers termes de la suite (S_n) :

Question hors barème : Une valeur approchée à 10^{-2} près de S_{20} est $-69648,39$.

```

U ← 1
S ← U
Pour k variant de 1 à 20
    U ← 1,5*U - 4
    S ← S + U
    Afficher S
Fin de Pour
    
```